

### EVALUACIÓN DE LA MATERIA PENDIENTE

#### Ejercicios y Problemas de Matemáticas I

#### Parte I

- 1) Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales. Dentro de los racionales, indica si son naturales y/o enteros.

a)  $\sqrt{7}$     b)  $\frac{-3}{5}$     c)  $\frac{10}{-2}$     d)  $e$     f)  $\sqrt[3]{1000}$     g)  $7^4$     h)  $\sqrt{-100}$     i)  $65^0$

- 2) Realiza las siguientes operaciones con radicales. Antes de ello, debes extraer todos los factores que se pueda en cada uno de ellos:

a)  $2\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$     b)  $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54}$     c)  $\sqrt{2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{8}$

- 3) Racionaliza las siguientes expresiones:

a)  $\frac{5}{\sqrt{7}}$     b)  $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$     c)  $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$

- 4) Desarrolla, en función de « $\log(a)$ », de « $\log(b)$ » y de « $\log(c)$ » las siguientes expresiones:

a)  $\log(a \cdot b^2 \cdot c^3)$     b)  $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b \cdot c}\right)$   
c)  $\log\left(\frac{(a \cdot b)^3}{c^4}\right)$     d)  $\log_{100}\left(\sqrt[4]{\frac{a \cdot b}{c}}\right)$

- 5) Realiza, con tu calculadora, las operaciones siguientes. Aproxima el resultado con tres decimales de precisión, cuando este no sea exacto.

a)  $4^6$     b)  $(-5)^7$     c)  $7^{\frac{3}{8}}$     d)  $8^{0.25}$   
e)  $\sqrt{\pi}^{\sqrt{5}}$     f)  $6^{-1}$     g)  $\left(\frac{8}{e}\right)^{-2}$     h)  $((\pi)^3)^4$

- 6) Realiza, con tu calculadora, las operaciones siguientes. Aproxima el resultado con tres decimales de precisión, cuando este no sea exacto.

a)  $\sqrt[5]{12321}$     b)  $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$     c)  $\sqrt[3]{10e}$     d)  $\sqrt[14]{7^{15}}$   
e)  $\sqrt[9]{\frac{2\pi+e}{4}}$     f)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6532}}}$     g)  $\sqrt{10\sqrt[3]{10}}$     h)  $\sqrt[4]{4+\sqrt{5}}$

- 7) Calcula, utilizando la calculadora los siguientes logaritmos. Aproxima el resultado con tres decimales de precisión, cuando este no sea exacto. Si alguno no existe, indícalo.

|                       |                  |                                      |                                                 |
|-----------------------|------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $\log(430)$        | b) $\log_3(430)$ | c) $\log_2\left(\frac{25}{3}\right)$ | d) $\log\left(\frac{4}{300}\right)$             |
| e) $\ln(\sqrt[5]{e})$ | f) $\ln(-3)$     | g) $\ln(10\pi - 3e)$                 | h) $\log_5\left(\frac{\sqrt[3]{100}}{2}\right)$ |

- 8) Sean los polinomios:

$$A(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \text{ y } B(x) = x^2 + 4x + 3$$

- a) Calcula  $A(x) \cdot B(x)$
  - b) Justifica si es posible, o no, realizar la operación  $(B(x))^7$  utilizando la fórmula del binomio de Newton.
  - c) Calcula  $A(x) \underline{B(x)}$
  - d) Justifica si la operación de anterior apartado puede realizarse utilizando el método de Ruffini para la división.
  - e) Determina todas las raíces del polinomio  $A(x)$
  - f) Simplifica, si es posible, la fracción algebraica  $\frac{A(x)}{B(x)}$ .
- 9) Determina el valor del parámetro «m» para que el polinomio  $P(x) = x^3 + mx^2 - 4$  sea divisible, de forma exacta, por el polinomio  $Q(x) = x + 2$ . Si has utilizado el teorema del resto, justifica por qué puedes usarlo.

- 10) Construye el polinomio,  $P(x)$ , de grado 4, sabiendo que sus raíces son  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$  y  $x_4 = -4$  y que  $P(2) = -54$ .

- 11) Realiza la operación, simplificando en el proceso y el resultado final, siempre que sea posible:

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x^2} + \frac{3}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x + 4}$$

12) Resuelve la siguiente ecuación racional:

$$\frac{3x}{2x + x^2} - \frac{1}{x} + \frac{4}{2 + x} = 0$$

13) Resuelve la siguiente ecuación irracional:

$$\sqrt{-12x^3 - 3} + 6x + 3 = 0$$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones, de diversa índole:

a)  $9^{x-1} + 3^{x+1} = 972$

b)  $\log(\sqrt[3]{x}) + \log(x^2) = 9$

15) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{array} \right\}$$

16) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, que incluye expresiones exponenciales y logarítmicas:

$$\left. \begin{array}{l} \log(x) + \log(y) = 1 \\ 3^{x-1} = 9^y \end{array} \right\}$$

17) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 4 \\ -x + y - 3z = -7 \end{array} \right\}$$

18) Resuelve las siguientes inecuaciones. En ambos casos, expresa la solución en forma de intervalo.

a)  $x - \frac{2-x}{5} \leq \frac{4x+1}{3} - \frac{x-5}{15}$

b)  $x^4 - 25x^2 + 144 < 0$

19) Resuelve la siguiente inecuación racional:

$$\frac{4+x}{1-2x} \leq 2$$

20) De un determinado ángulo,  $\alpha$ , conocemos que  $\cos(\alpha) = \frac{1}{6}$  y que pertenece al cuarto cuadrante. Deduce el valor de:  $\sin(\alpha)$ ,  $\tan(\alpha)$ ,  $\operatorname{cosec}(\alpha)$  y  $\cotg(\alpha)$ .

21) Relaciona las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, del arco de giro  $10000^\circ$ , con las de otro ángulo del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas sean, en valor absoluto, iguales a las de éste, respectivamente.

22) Expresa el valor de  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$  en función de  $\sin(\theta)$  y  $\cos(\theta)$ . Utiliza, para ello, la igualdad trigonométrica que se muestra abajo.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta); \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

23) Demuestra las igualdades siguientes:

$$\text{a) } \sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \quad \text{b) } \frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}$$

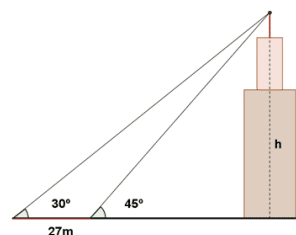
24) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$\text{a) } \cos(2x) + \sin(x) = 4\sin^2(x) \quad \text{b) } \frac{\sin^2(x)}{2} = \frac{\tan(x)}{4}$$

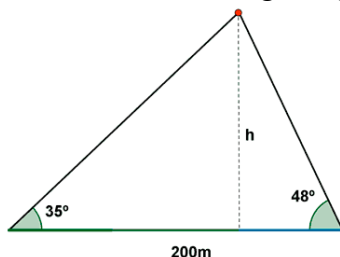
Ayuda:

- Para el apartado a):  $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)$
- Para el apartado b): recuerda que, si quieres resolver, por ejemplo, la ecuación  $\frac{x^2}{2} = \frac{x}{4y}$  no puedes eliminar (simplificar) la «x» pues entonces no contemplarías posibles soluciones de la ecuación. Se opera extrayendo factor común, que es un modo de factorizar la expresión.

25) La imagen de la derecha muestra un edificio con una antena en su azotea. El punto más alto de esta antena es vista desde dos puntos del suelo que distan 27 metros uno de ellos. A la vista de los datos que se indican, determina la altura a la que está el punto más alto de la antena.



26) Determina el valor de « $h$ », a la vista de la imagen siguiente:



27) Sean los vectores  $\vec{a} = (2,7)$ ,  $\vec{b} = (-3,5)$ ,  $\vec{c} = (10,-4)$  y  $\vec{d} = (-5,-6)$ , expresados en función de la base canónica  $\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$ . Realiza con ellos las operaciones que se indican a continuación. Ten en cuenta que algunos resultados serán vectores y otros escalares.

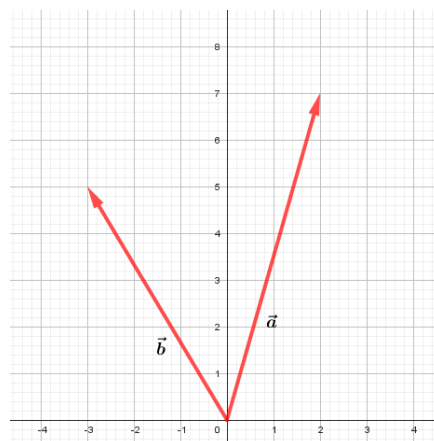
- a)  $3\vec{a} + 5\vec{b}$       b)  $-4\vec{c} + 10\vec{d} - \vec{b}$       c)  $\frac{1}{2}\vec{a} + 7\frac{\vec{b}}{3}$       d)  $|\vec{b}| + |\vec{c}|$

28) Con los mismos vectores del ejercicio anterior, realiza las operaciones siguientes. Ten en cuenta que algunos resultados serán vectores y otros escalares.

- a)  $\vec{b} \cdot \vec{c}$       b)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d})$       c)  $\vec{a} \cdot \vec{a}$       d)  $|\vec{a}|^2$

29) Responde a las siguientes preguntas sobre los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  del ejercicio 1 y que se muestran en la imagen de la figura:

- Halla el ángulo entre ambos.
- Expresa un vector perpendicular a  $\vec{a}$  y llámale  $\vec{a}'$ .
- Halla el ángulo entre  $\vec{a}'$  y  $\vec{b}$ .
- Explica, utilizando el producto escalar de vectores, por qué el ángulo entre los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es igual que entre los vectores  $-\vec{a}$  y  $-\vec{b}$ .

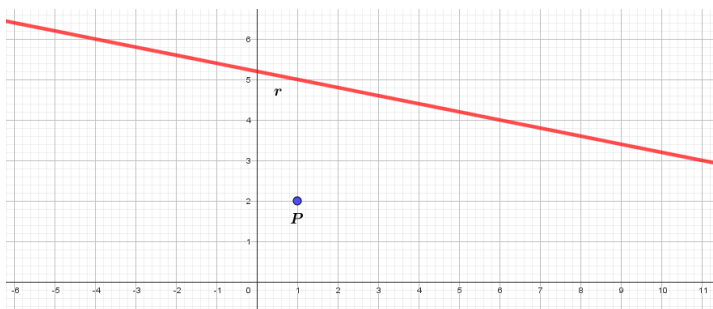


30) En la imagen se muestra la recta  $r$  y un punto  $P$ .

(2)

a) Expresa de tres formas diferentes la ecuación de la recta  $r$ .

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $r$  y que pasa por el punto  $P$ . Exprésala de dos formas diferentes.



c) Halla una ecuación de la recta paralela a  $r$  y que pasa por el punto  $P$ .

31) La imagen de abajo muestra un triángulo, determinado por los puntos  $A(3,1)$ ,  $B(8,3)$  y  $C(5,6)$ .

a) Determina el ángulo interno de este triángulo visto desde el vértice  $B$ .

b) Calcula las longitudes de los tres lados y, usándolas, determina el área del triángulo utilizando la fórmula de Herón.

Fórmula de Herón:  $A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ , siendo  $p$  el semiperímetro y « $a$ », « $b$ » y « $c$ » la longitud de cada uno de los lados.

c) Expresa la ecuación general de la recta que contiene a la altura desde el vértice  $C$ .

d) Expresa la ecuación de la recta que contiene al lado  $\overline{AB}$ .

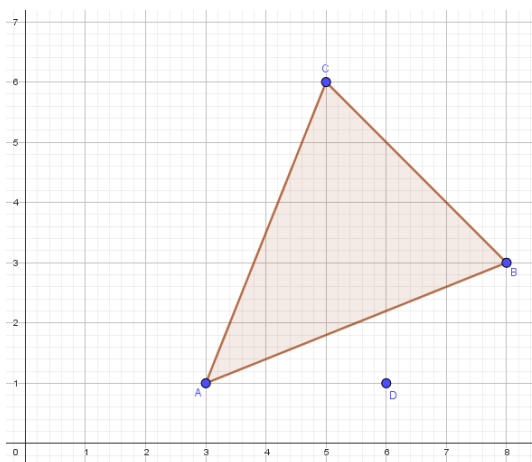
e) Determina el punto de corte de este lado  $\overline{AB}$  con la altura desde el vértice  $C$ .

f) Una vez que tengas ese punto, calcula la distancia entre él y el vértice  $C$ .

g) Este último cálculo te ha proporcionado la longitud de la altura vista desde ese vértice. Úsalo para determinar el área del triángulo, utilizando la fórmula habitual que aprendiste en el colegio.

Fórmula:  $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

h) Compara el resultado del apartado g) con el del apartado b). ¿Qué conclusión extraes?



32) Sean los números complejos:  $z_1 = 10 + 5i$ ;  $z_2 = -3 + 2i$ ;  $z_3 = \frac{-1}{4} - 4i$  y  $z_4 = \frac{9}{2}i$ . Todos están expresados en forma binómica. Realiza las operaciones siguientes en esta misma forma:

a)  $8z_1 - 2z_2 + 7z_3$       b)  $z_1 \cdot z_3$       c)  $\frac{z_1}{z_2}$       d)  $|z_3|$       e)  $|\bar{z}_4|$

33) Expresa  $z_2$  en forma polar y en forma trigonométrica. Aproxima el argumento a las unidades. Y, utilizando esta forma polar, realiza el cálculo de las potencias sucesivas  $z_2$ ,  $z_2^2$  y  $z_2^3$ . Expresa, además, en general, la expresión de  $z_2^n$ .

34) Sean los números complejos:

$$z_5 = 7_{32^\circ}, z_6 = \sqrt{33}_3 \text{ y } z_7 = 5\sqrt{7} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right)$$

- a) Expresa  $z_5$  y  $z_6$  en forma binómica.
- b) Utilizando la forma polar, realiza la operación  $\frac{z_6^5}{3 \cdot z_7}$
- c) Expresa en forma trigonométrica  $\bar{z}_5$  y  $\bar{z}_7$
- d) Determina el valor de  $\alpha$  para que el resultado  $\frac{z_5}{4\alpha}$  sea un número **real negativo**.
- e) Determina el valor de  $\alpha$  para que el resultado  $\frac{z_6}{10\alpha}$  sea un número **imaginario puro negativo**.

35) Determina todas las soluciones de  $\sqrt[5]{\frac{4+3i}{i}}$ .

36) Resuelve la ecuación  $z^3 + iz = 0$ , en el dominio complejo.

Resuelve esta relación de ejercicios y problemas y entrégala el día que realices el examen de evaluación de esta parte.

Su realización te ayudará en la preparación efectiva de la prueba que se va a proponer.

Además, la puntuación de estos ejercicios y problemas contribuirá con un 20% a la calificación de la materia.