IES CELIA VIÑAS
TRADICIÓN E INNOVACIÓN

Recuperación MAT1

I.E.S. «Celia Viñas»

Tercer trimestre

Esta relación se entrega durante la realización del tercer examen de recuperación. Su valoración seguirá los criterios establecidos en el plan de recuperación, que figura en el tablón oficial del departamento de matemáticas y en la página web del centro.

Ejercicio 1. Halla el valor de k que hace f continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2, \\ 2k+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

d) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$

Ejercicio 3. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

f) $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{5-x}}$

g) $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{3-x}}$

Ejercicio 4. En cada caso, calcula los valores de m y n para que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0, \\ mx+n & \text{si } 0 < x < 2, \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3mx-1 & \text{si } x \leq -1, \\ nx^2-4m & \text{si } -1 < x \leq 3, \\ n+2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Ejercicio 5. Sea la función $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$ con a, b y c números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- La gráfica de f presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$.
- La gráfica de f presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.
- El punto $(6, 3)$ pertenece a la gráfica de f.

Ejercicio 6. Calcula los números a, b y c, sabiendo que la recta $y = 2x - 3$ es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+1}$$

Ejercicio 7. ¿Hay algún número c para el que exista el siguiente límite?

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+4x+cx+2c}{x^2+x-2}$$

Calcula c y el límite correspondiente.

Ejercicio 8. Obtén la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados y representa gráficamente las funciones y las rectas obtenidas. ¿Responden las rectas obtenidas a la idea intuitiva de tangente?

a) $f(x) = x^3$, en $P(1, 1)$

b) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, en $x = -2$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, en $x = 2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 2$

Ejercicio 9. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x-1)^5$

b) $f(x) = (3x+2)^4$

c) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^6$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2}$

e) $f(x) = \sqrt{2x^3+x^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$

Ejercicio 10. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(x^3 - 2x + 1)$

b) $f(x) = \log_2(3x^2 - 1)$

c) $f(x) = \sqrt{x\ln(7x^2)}$

d) $f(x) = 5x\log_5(x^4)$

e) $f(x) = x\ln(x)$

f) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

Ejercicio 11. Determina los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

e) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$

f) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 24x + 1$

Ejercicio 12. Calcula el valor máximo y mínimo de:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ en el intervalo $[0,4]$

b) $f(x) = x^2 - 3x$ en el intervalo $[2,5]$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1,4]$

d) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 6$ en el intervalo $[-3,4]$

e) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$ en el intervalo $[-5,2]$

f) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ en el intervalo $[-2,2]$

Ejercicio 13. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x}{x^2+1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva.

Ejercicio 14. Calcula qué valores deben tener las constantes a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(-2,-3)$, un máximo relativo para $x = 1$ y además $f(0) = -1$.

Ejercicio 15. Halla los valores de las constantes a, b y c que hacen que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(-1,20)$ y tenga un máximo relativo en $Q(3,12)$.

Ejercicio 16. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm^2 de área total para que el volumen sea máximo.

Ejercicio 17. De todas las rectas que pasan por $P(1,4)$, calcula la ecuación de la que determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.

Ejercicio 18. Queremos delimitar una parcela rectangular de 700 m^2 de superficie. La valla que utilizamos en el lado que da a la calle vale 40 euros el metro lineal y la valla de los otros tres lados vale 16 euros el metro lineal. Por razones obvias ningún lado de la parcela debe medir menos de un metro. Calcula las dimensiones de la parcela para que la valla sea la más barata posible.

Ejercicio 19. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, calcula la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

Ejercicio 20. En cada caso, halla los valores de a y b para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < -2 \\ x^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 21. Se llama recta normal a una curva en un punto de la misma a la perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto. Calcula la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 22. Halla los valores de la constante k para los que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x-k)x$ en el punto de abscisa $x = 1$ son:

a) Paralelas

b) Perpendiculares