4 Ecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. **Ejercicios resueltos.**

3. **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 14 = 0$ **c)** $7x + 2 = 30x^2$

a) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -7 \end{cases}$ **c)** $30x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \\ x = -\frac{10}{60} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.**

a) $3x^2 + 18x = 0$ **b)** $16x^2 - 25 = 0$ **c)** $-5x^2 + 7x = 0$

a) $x(3x+18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 18 = 0 \Rightarrow x = -\frac{18}{3} = -6 \end{cases}$

b) $x^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4} \quad x = -\frac{5}{4}$

c) $x(-5x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{5} \end{cases}$

5. **Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $4x^2 + 4x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 18x + 80 = 0$ **d)** $(x+2)^2 + 2(x-1)^2 = 2x(x-4) - 10$

a) $\Delta = -15$ Ninguna **b)** $\Delta = 0$ Una **c)** $\Delta = 4$ Dos **d)** $\Delta = 0$ Una

6. **Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea -3 y el producto -28.**

Se aplican las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -28 \Rightarrow c = -28a \end{array}\right\} \text{Si } a = 1 \Rightarrow b = 3 \text{ y } c = -28$$

Por tanto, una ecuación que cumple las condiciones es: $x^2 + 3x - 28 = 0$

7 y 8. **Ejercicios resueltos.**

9. Opera y resuelve las ecuaciones bicuadradas obtenidas.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ **b)** $\dfrac{24}{x^2} = 3x^2 - 6$ **c)** $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\dfrac{5}{x}$

a) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 16 \\ z = 4 \end{cases}$. Luego si $z = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ y si $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b) $\dfrac{24}{x^2} = 3x^2 - 6 \Rightarrow 3x^4 - 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = -2 \end{cases}$.

Luego $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ y si $z = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2}$ no tiene solución real

c) $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\dfrac{5}{x} \Rightarrow x^2\left[x^2 + 6\right] + 5 = 0 \Rightarrow x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -5 \end{cases}$. Por tanto, no hay soluciones reales.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 - 39x^2 + 265x - 350 = 0$

d) $8x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 7x + 6 = 0$

a) $(x-1)^2(x-4) = 0$; $x = 1$ (doble) y $x = 4$

b) $(x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{-3}{2}$ y $x = \dfrac{1}{3}$

c) $(x-5)^2(x-2)(x+7) = 0$; $x = 5$ (doble), $x = 2$ y $x = -7$

d) $(x-1)(x+2)(2x-1)(4x+3) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{-3}{4}$

11. Ejercicio resuelto.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + \dfrac{2}{x} = -3$ **b)** $\dfrac{11x+11}{9} = 2x - \dfrac{12}{2-x} - 7$ **c)** $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{4}{x} = 3$ **d)** $\dfrac{6x+7}{x+3} = \dfrac{x}{x-1}$

a) $x^2 + 2 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = -2,\ x = -1$

b) $(11x+11)(2-x) = 18x(2-x) - 108 - 63(2-x) \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow x = 8,\ x = \dfrac{32}{7}$

c) $4x + 4(x+2) = 3x(x+2) \Rightarrow -3x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{4}{3}$

d) $(6x+7)(x-1) = x(x+3) \Rightarrow 5x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = \dfrac{7}{5}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{7}{3x-3}$ **b)** $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}$ **c)** $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{x}{x+1}$ **d)** $\frac{x^3-8}{x-1}=\frac{24x+16}{x+2}$

a) $2x(x-1)+3(2x+3)=7\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow x=-1$

b) $2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2\Rightarrow -x^2-2x=0\Rightarrow x=0$, $x=-2$ (solución no válida)

c) $2+3x(x+1)=x(x-1)\Rightarrow 2x^2+4x+2=0=0\Rightarrow x=-1$ (solución doble), pero la solución no es válida

d) $\left(x^3-8\right)(x+2)=(24x+16)(x-1)\Rightarrow x^2\left(x^2+2x-24\right)=0\Rightarrow x=0$ (doble), $x=4$ $x=-6$

14 a 16. Ejercicios resueltos.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+2}-x+4=0$ **c)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=-5$ **e)** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

b) $x+\sqrt{10+x^2}=5$ **d)** $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+23}$ **f)** $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

a) $\sqrt{x+2}=x-4\Rightarrow\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x-4)^2\Rightarrow x+2=x^2+16-8x\Rightarrow x^2-9x+14=0$.

Luego $x=7$ (sí es solución) y $x=2$ (no es solución).

b) $\left(\sqrt{10+x^2}\right)^2=(5-x)^2\Rightarrow 10+x^2=x^2+25-10x\Rightarrow 10x=15$. Luego $x=\frac{3}{2}$ (sí es solución).

c) $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-5\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}-5\right)^2\Rightarrow x+1=4x-3+25-10\sqrt{4x-3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{4x-3}=3x+21\Rightarrow\left(10\sqrt{4x-3}\right)^2=(3x+21)^2\Rightarrow 9x^2-274x+741=0$.

Luego $x=3$ (no es solución) y $x=\frac{247}{9}$ (sí es solución).

d) $\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}\right)^2=\left(\sqrt{x+23}\right)^2\Rightarrow x+7+2x+2\sqrt{2x^2+14x}=x+23\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+14x}=16-2x\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{2x^2+14x}=8-x\Rightarrow\left(\sqrt{2x^2+14x}\right)^2=(8-x)^2\Rightarrow x^2+30x-64=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-32 \text{ Solución falsa}\end{cases}$.

Luego $x=2$ (sí es solución) y $x=-32$ (no es solución).

e) $\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1}\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4$.

Luego $x=5$ (sí es solución).

f) $\left(x^2-4\right)^2=\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2\Rightarrow x^4+16-8x^2=3x^2-2\Rightarrow x^4-11x^2+18=0$.

Luego $x=-3$ (sí es solución), $x=3$ (sí es solución), $x=-\sqrt{2}$ (no es solución) y $x=\sqrt{2}$ (no es solución).

18. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}=2$ **b)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=x-1$ **c)** $\dfrac{x}{\sqrt{x}}=x-2$ **d)** $\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}$

a) $\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=\left(\sqrt{x}+2\right)^2 \Rightarrow 2x+7=x+4+4\sqrt{x} \Rightarrow (x+3)^2=\left(4\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-10x+9=0$

Luego x= 9, x= 1 (sí son soluciones)

b) $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x}=x^2-2x+1 \Rightarrow -x^3+3x^2-3x+1=0 \Rightarrow -(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$ (sí es solución)

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-2)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x}=x^2+4-4x \Rightarrow x^2-5x+4=0$. Luego x= 4 (sí es solución), x= 1 (no es solución)

d) $\left(\sqrt{3\sqrt{16-x}}\right)^2=\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 \Rightarrow 3\sqrt{16-x}=2x-5 \Rightarrow \left(3\sqrt{16-x}\right)^2=(2x-5)^2 \Rightarrow 9(16-x)=4x^2-20x+25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-11x-119 \Rightarrow x=-\dfrac{17}{4}$ (no es solución), x= 7 (sí es solución)

19 a 22. Ejercicios resueltos.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 3x=\log 6+2\log x$

b) $\log(2x+3)-\log(x-2)=\log 36$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

a) $3x=6x^2 \Rightarrow x(6x-3)=0$. Luego $x=0$ (no es solución) y $x=\dfrac{1}{2}$ (sí es solución)

b) $\log\dfrac{2x+3}{x-2}=\log 36 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-2}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-72 \Rightarrow x=\dfrac{75}{34}$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log\left(2x-x^2\right)+1 \Rightarrow \log\left[(4-5x)(2x-2)\right]=\log\left[10\left(2x-x^2\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (no es solución). La ecuación no tiene solución.

24. Halla un número tal que si se añade a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es la unidad.

Número desconocido: x.

Por tanto, $\log x+\log 2=1 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

25. Calcula el valor de un número si el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$2\log x=\log 4+\log 9 \Rightarrow \log x^2=\log 36 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6, x=-6$. El valor es $x=6$, la solución $x=-6$ no es válida.

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{2x}=16$ **b)** $7^{x-3}=49$ **c)** $\frac{1}{2^x}=16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **d)** $4^{\frac{2x-3}{5}}=64$

a) $4^{2x}=16\Rightarrow 4^{2x}=4^2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$

b) $7^{x-3}=49\Rightarrow 7^{x-3}=7^2\Rightarrow x-3=2\Rightarrow x=5$

c) $\frac{1}{2^x}=16^{\frac{x(x-1)}{2}}\Rightarrow 2^{-x}=2^{4\cdot\frac{x(x-1)}{2}}\Rightarrow -x=2x(x-1)\Rightarrow 2x^2-x=0\Rightarrow x(2x-1)=0\Rightarrow x=0, x=\frac{1}{2}$

d) $4^{\frac{2x-3}{5}}=64\Rightarrow 4^{\frac{2x-3}{5}}=4^3\Rightarrow \frac{2x-3}{5}=3\Rightarrow 2x-3=15\Rightarrow x=9$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$

b) $2^{x+4}-8^x=0$

c) $5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0$

d) $2\cdot 10^{2x+4}+3\cdot 10^{x+2}-5=0$

a) $\frac{1}{2}\cdot 2^x+2^x+2\cdot 2^x=7\Rightarrow \frac{7}{2}\cdot 2^x=7\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$

b) $2^{x+4}=\left(2^3\right)^x=2^{3x}\Rightarrow x+4=3x\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$

c) $\left(5^x\right)^2-30\cdot 5^x+125=0\Rightarrow 5^x=\frac{30\pm 20}{2}\Rightarrow \begin{cases}5^x=25\Rightarrow x=2\\ 5^x=5\Rightarrow x=1\end{cases}$

d) $2\cdot 10^{2x+4}+3\cdot 10^{x+2}-5=0\Rightarrow 20\,000\left(10^x\right)^2+300\cdot 10^x-5=0\Rightarrow 20\,000z^2+300z-5=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4000z^2+60z-1=0\Rightarrow z=\frac{-60\pm 140}{8000}\Rightarrow z=10^{-2}, z=-0{,}025$. Deshaciendo el cambio $x=-2$, $10^x=-0{,}025$ (sin solución real).

31. Ejercicio interactivo.

32. Ejercicio resuelto.

33. Di si los siguientes sistemas son lineales o no lineales e identifica las incógnitas, coeficientes y términos independientes.

a) $\begin{cases}2x+xy=3\\ x+3y=4\\ 2x+5y=6\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y=1\\ y+z=2\\ x+2z=0\end{cases}$

		Incógnitas	Primera ecuación		Segunda ecuación		Tercera ecuación	
			Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente
a)	No lineal	x,y	2 (en x) 1 (en xy)	3	1 (en x) 3 (en y)	4	2 (en x) 5 (en y)	6
b)	Lineal	x, y, z	1,1 y 0	1	0, 1 y 1	2	1, 0 y 2	0

34. Indica si los pares de valores dados son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{9x+10y=13} \\ \mathbf{-x+4y=-4} \end{cases}$**.**

a) $x=-3,\ y=4$ **b)** $x=2,\ y=-\dfrac{1}{2}$

a) $\begin{cases} 9(-3)+10\cdot 4=-27+40=13 \\ -(-3)+4\cdot 4=3+16=19\neq -4 \end{cases} \Rightarrow$ No es solución.

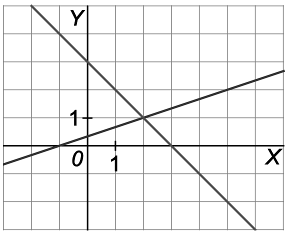
b) $\begin{cases} 9\cdot 2+10\left(-\dfrac{1}{2}\right)=18-5=13 \\ -2+4\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2-2=4 \end{cases} \Rightarrow$ Sí es solución.

35 a 39. Ejercicios resueltos.

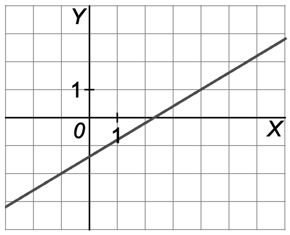
40. Resuelve gráficamente y por algún método algebraico.

a) $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-3y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-5y=-10 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ -6x+10y=-14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-3(4-y)=6 \\ 3(2x-9)-5y=-1 \end{cases}$

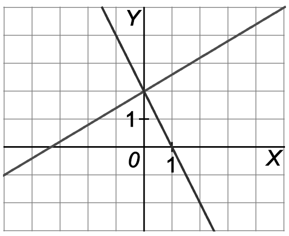
a) $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ -2x+6y=2 \end{cases} \Rightarrow y=1, x=2$



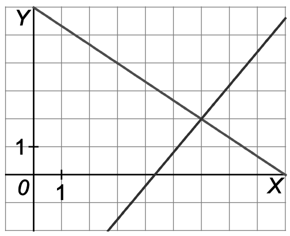
c) $\begin{cases} 6x-10y=14 \\ -6x+10y=-14 \end{cases}$, Infinitas soluciones.



b) $\begin{cases} 3x-5y=-10 \\ 10x+5y=10 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=2$



d) $\begin{cases} 2x+3y=18 \\ 6x-5y=26 \end{cases} \Rightarrow x=6, y=2$



41. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2+3y^2=32 \\ -3x^2+4y^2=-48 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y=8-2x \\ 2x+3(8-2x)^2=22 \end{cases} \Rightarrow 2x+192+12x^2-96x=22 \Rightarrow 12x^2-94x+170=0$. Soluciones: $\begin{cases} x=5, y=-2 \\ x=\dfrac{17}{6}, y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $\begin{matrix} 3E_1 \\ 2E_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 6x^2+9y^2=96 \\ -6x^2+8y^2=-96 \end{cases} \Rightarrow 17y^2=0 \Rightarrow y=0$. Soluciones: $\begin{cases} y=0, x=4 \\ y=0, x=-4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-y \\ (4-y)^2+2y^2=19 \Rightarrow 3y^2-8y+16=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 3y^2-8y-3=0 \end{cases}$. Soluciones: $\begin{cases} y=3,\ x=1 \\ y=-\dfrac{1}{3},\ x=\dfrac{13}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\left(\dfrac{6}{x}\right)^2=13 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow x^4-13x^2+36=0$. Soluciones: $\begin{cases} x=2,\ y=3 \\ x=-2,\ y=-3 \\ x=3, y=2 \\ x=-3, y=-2 \end{cases}$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Estudia y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x-y+2z=3 \\ x+2y-7z=0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2x+5y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \; 9E_3-11E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=3, x=-2$

b) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow y=1, z=-2, x=4$

c) $\begin{matrix} 2E_2-3E_1 \\ E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 4z=6 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{36}, x=\frac{25}{36}$

d) $\begin{matrix} 4E_2-5E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \; 3E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow z=0, y=-3, x=2$

e) $\begin{matrix} 5E_2-3E_1 \\ 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases}$ Sistema incompatible. No tiene solución.

f) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 5y-15z=-5 \end{cases} \; E_3+5E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow z=t, y=3t-1, x=t+2$

g) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+3z=2 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=-1, x=1$

h) $\begin{matrix} 3E_2-2E_1 \\ 3E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 4y+2z=1 \end{cases} \; 17E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 66z=33 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{2}, y=0, x=\frac{1}{2}$

46. Resuelve el siguiente sistema aplicando un cambio de variable que lo transforme en lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=-7 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{5}{z}=-12 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=15 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable: $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{1}{z}$. Por tanto:

$$\begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ 2a+3b-5c=-12 \\ 4a+4b-c=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ -4b+11c=43 \end{cases} \Rightarrow E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ 7c=35 \end{cases} \Rightarrow c=5, b=3, a=2$$

Luego: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{5}$

47. Calcula las edades de tres hermanos sabiendo que:

- **Las edades de los tres suman 44 años.**
- **La edad del hermano mediano es superior en medio año a la media aritmética de las edades de los otros dos hermanos.**
- **La suma de las edades de los dos hermanos menores supera en 10 años a la edad del mayor.**

x edad del hermano mayor en años, *y* edad del hermano mediano en años, *z* edad del hermano pequeño en años.

$$\begin{cases} x+y+z=44 \\ y=\dfrac{x+z}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y+z=x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ x-2y+z=-1 \\ x-y-z=-10 \end{cases} \begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3+E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ -3y=-45 \\ 2x=34 \end{cases} \Rightarrow x=17, y=15, z=12 .$$

Por tanto, la edad del hermano mayor es 17 años, la del hermano mediano es 15 años y la del hermano pequeño 12 años.

48. Ejercicio interactivo.

49. La oferta y la demanda del mercado de un modelo de pantalones vaqueros, cuyo precio se encuentra entre 40 € y 60 €, en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$f_o=0{,}5p^2-40p+1000$ $\qquad$ $f_d=-10p+750$

a) Calcula el punto de equilibrio de este mercado.

b) Halla el número de vaqueros vendidos cuando se produce el equilibrio de mercado.

a) Igualando ambas expresiones: $0{,}5p^2-40p+1000=-10p+750 \Rightarrow p=10$ (no válida) $p=50$ .Luego el punto de equilibrio se alcanza con un precio de 50 €.

b) Para $p=50$, sustituimos en f_0 o en f_d y el número de vaqueros vendidos es de 250 unidades.

50. La tabla muestra la población española (en millones de personas) en diferentes años:

Año	2005	2011	2012	2013	2014
Población	43	46,2	46,1	46,1	46

Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población española para los periodos:

a) 2005 a 2014 **b)** 2011 a 2013 **c)** 2012 a 2013

a) $46 = 43 \cdot e^{(2014-2005)r} \Rightarrow e^{9r} = \frac{46}{43} \Rightarrow \ln\left(e^{9r}\right) = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow 9r = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow r = 0{,}0075 \Rightarrow r\ \% = 0{,}75\ \%$.

b) $46{,}1 = 46{,}2 \cdot e^{(2013-2011)r} \Rightarrow e^{2r} = \frac{46{,}1}{46{,}2} \Rightarrow \ln\left(e^{2r}\right) = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow 2r = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow r = -0{,}001 \Rightarrow r\ \% = -0{,}1\%$.

c) $46{,}1 = 46{,}1 \cdot e^{(2013-2012)r} \Rightarrow e^{r} = \frac{46{,}1}{46{,}1} \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \%r = 0\ \%$

51 a 61. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer y segundo grado

62. Halla mentalmente las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 1 - 2x = 6x$ **b)** $x^2 + x + 1 = 3 - x + x^2$ **c)** $3x + 2 - x = 2x - 5$ **d)** $\frac{1}{2}x + 3{,}5 = 2{,}6 - x$

a) $x = \frac{1}{5}$ **b)** $x = 1$ **c)** Sin solución **d)** $x = -0{,}6$

63. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x$

b) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x-1)$

d) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$

a) $2x - 6x + 2 + 8x - 20 - 10 = 8x$, luego $x = -7$

b) $6x - 3x + 1 = 3x + 1$, luego $0 = 0$. Se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $3x - 1 - 8x = 4x - \frac{7}{2} - 12x + 4 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150$, luego $x = 12$

64. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x-2)^2 + (x+4)(x-2) = 2 - 3(x+1)$

b) $-2(x-2)^2 + 3x + 8 = 0$

c) $\frac{x(x-1)}{15} + \frac{(x-6)^2}{5} + \frac{(x+2)^2}{3} = \frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

a) $x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x - 2x - 8 - 2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = \frac{-3}{2}$

b) $-2x^2 + 8x - 8 + 3x + 8 = 0$; $-2x^2 + 11x = 0$, de soluciones $x = 0$ y $x = \frac{11}{2}$

c) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 12x - 6x + 8$; $x = -120$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^2 + 18x = 0$ **b)** $2x^2 - 9x = 0$ **c)** $-x^2 + 2x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

a) $x = 0, x = -18$ **b)** $x = 0, x = \frac{9}{2}$ **c)** $x = 0, x = 2$ **d)** $x = 2, x = -2$

66. Indica el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones sin resolverlas.

a) $x^2 - 3x + 12 = 0$ **b)** $-4x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9} = 0$ **c)** $-3x^2 - x + 4 = 0$ **d)** $\frac{3}{2}x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{5}{2} = 0$

a) $\Delta = -39$. Ninguna solución real

c) $\Delta = 49$. Dos soluciones reales

b) $\Delta = 0$. Una solución real doble

d) $\Delta = \frac{151}{9}$. Dos soluciones reales

67. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga las soluciones indicadas.

a) $x = 2, x = -3$ **b)** $x = 4$ (doble)

a) $(x - 2)(x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$ **b)** $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 16 - 8x = 0$

68. Calcula, sin resolverlas, la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + 3x = 18$ **b)** $x^2 - 2x - 2 = 0$ **c)** $x^2 + \frac{x}{6} = \frac{1}{3}$ **d)** $ax^2 + ax - 1 = 0$

a) Suma $-\frac{3}{3} = -1$, producto $-\frac{18}{3} = -6$

c) Suma $-\frac{1}{6}$, producto $-\frac{1}{3}$

b) Suma 2, producto –2

d) Suma $-\frac{a}{a} = -1$, producto $-\frac{1}{a}$

69. Halla una ecuación de segundo grado que tenga como raíces:

a) $x_1 = -2, x_2 = 3$ **c)** $x_1 = -2, x_2 = -2$ **e)** $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$

b) $x_1 = -2, x_2 = -5$ **d)** $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -1$ **f)** $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 2$

a) $x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 4 = 0$ **e)** $12x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$ **d)** $3x^2 + x - 2 = 0$ **f)** $x^2 + \left(-\sqrt{2} - 2\right)x + 2\sqrt{2} = 0$

70. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus soluciones sumen $\frac{3}{4}$ y el producto de las mismas sea 2.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{4} = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = 2 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + 2 = 0$

71. Escribe una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces valga 3 y su producto –18.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -18 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

Ecuaciones de grado superior a dos

72. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **c)** $x^4 - 34x^2 - 72 = 0$ **e)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **g)** $2(x + 1)^4 - 8x^3 - 8(x + 3) + 8 = 0$

b) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$ **d)** $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ **f)** $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

a) $x = 1$, $x = -1$, $x = 7$, $x = -7$

b) $x = 2$, $x = -2$, $x = 11$, $x = -11$

c) $x = 6$, $x = -6$

d) Sin soluciones reales

e) $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$, $x = -1$

f) $x = \pm\dfrac{1}{2}$

g) $x = 1$, $x = -1$

73. Opera y encuentra las soluciones de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 36} + 3}$

$x^4 + 36x^2 = 10x^2 + 3x^2 + 108$. Luego $x^4 + 23x^2 - 108 = 0$, cuyas soluciones son $x = 2$, $x = -2$

74. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas por factorización.

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 + \dfrac{11}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x = 2$ **e)** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

b) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$ **d)** $x^6 + x^4 = 2x^5 + 2x^3$ **f)** $x^2(x + 1) = x(x + 1)$

a) $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$, de soluciones $x = -2$, $x = 3$

b) $(x - 1)(6x^2 - x - 15) = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = -\dfrac{3}{2}$ $x = \dfrac{5}{3}$

c) $(3x + 2)(x - 3)(x - 1)^2 = 0$, de soluciones $x = 1$ (doble), $x = 3$, $x = \dfrac{-2}{3}$

d) $x^3(x - 2)(x^2 + 1) = 0$; $x = 0$ (triple), $x = 2$

e) $(x - 1)^2(x + 1) = 0$; $x = 1$ (doble), $x = -1$

f) $(x + 1)x(x - 1) = 0$; $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$

75. Resuelve las siguientes ecuaciones estudiando los valores que anulan cada factor.

a) $(x - 4)(x + 5) = 0$ **b)** $x(x^2 - x - 1) = 0$ **c)** c) $(2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 1) = 0$ d) $(x^2 - a)(x^2 + 2x - 3) = 0$

a) $x = 4$, $x = -5$ **b)** $x = 0$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ **c)** $x = \dfrac{-1}{2}$, $x = \dfrac{-1}{3}$ **d)** $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$, $x = 1$, $x = -3$

76. Escribe en cada caso una ecuación cuyas soluciones sean las indicadas.

a) 1 y 5 **b)** –2, –7, 2 y 7 **c)** $\dfrac{1}{2}$, –2 y $\dfrac{3}{4}$ **d)** a, b, $\dfrac{c}{4}$ y 0

a) $(x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $(x + 2)(x + 7)(x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^4 - 53x^2 + 196 = 0$

c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 2)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{17}{8}x + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $(x - a)(x - b)\left(x - \dfrac{c}{4}\right)x = 0$

77. Resuelve la ecuación $\boldsymbol{(x^3 - 2)^4 = 16}$ aplicando el cambio de incógnita $\boldsymbol{z = x^3 - 2}$.

$z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} = \pm 2$. Si $z = 2$, entonces $x^3 = 2 + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$ y si $z = -2$, entonces $x^3 = -2 + 2 \Rightarrow x = 0$

Ecuaciones racionales

78. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0$

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}\Rightarrow 12(x+1)=9x^2\Rightarrow x=-\frac{2}{3},\ x=2$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}\Rightarrow\frac{23}{12x}=\frac{13}{36}\Rightarrow x=\frac{69}{13}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1\Rightarrow x^3+x^2+x+1=0\Rightarrow x=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}\Rightarrow 729(r+2)=1300(r+1)^2\Rightarrow r=-\frac{79}{52},r=\frac{2}{25}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}\Rightarrow a^3(a+1)=a^2\Rightarrow a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0\Rightarrow 558r^2+841r-17=0\Rightarrow r=0{,}02,\ r=-1{,}527$

79. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x+3=-\frac{2}{x}$

b) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}$

e) $\frac{x+1}{2x}=\frac{x^2-1}{x-1}$

f) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$

g) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}$

h) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$

a) $x^2+3x+2=0\Rightarrow x=-1,x=-2$

b) $36x-18x^2-108=126-63x+22x+22-11x^2-11x\Rightarrow 7x^2-88x+256=0\Rightarrow x=8,x=\frac{32}{7}$

c) $x^2+11x+18-5x-x^2=12x+12\Rightarrow x=1$

d) $20x^2+80+80x-20x^2-20-40x=9x^2+27x+18\Rightarrow 9x^2-13x-42=0\Rightarrow x=3,x=\frac{-14}{9}$

e) $x^2-1=2x\left(x^2-1\right)\Rightarrow\left(x^2-1\right)(1-2x)=0\Rightarrow x=1,x=-1,x=\frac{1}{2}$

f) $4x+8+4x=3x^2+6x\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x=2,x=\frac{-4}{3}$

g) $3x^2+3x+3x+3=4x^2+12x-4x-12\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow x=3,x=-5$

h) $x+a+x-a=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

80. Resuelve la siguiente ecuación aplicando el cambio de variable $z = x^2 - 3x$.

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{(x^2 - 3x)^2 - 1} = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$\frac{z-1}{z^2-1} = \frac{z-2}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{z+1} = \frac{z-2}{z^2} \Rightarrow z^2 = (z+1)(z-2) \Rightarrow z^2 - z^2 + 2 + z = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

Ecuaciones con radicales

81. Halla mentalmente la solución de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+1} = 4$ **b)** $\sqrt{\frac{x}{4}} = 9$ **c)** $\sqrt{3x+1} = 7$ **d)** $\sqrt{x^4} = 9$

a) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x + 1 = 16 \Rightarrow x = 15$ (solución válida)

b) $\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow \frac{x}{4} = 81 \Rightarrow x = 324$ (solución válida).

c) $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow 3x + 1 = 49 \Rightarrow x = 16$ (solución válida).

d) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ (soluciones válidas).

82. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $2 - 3\sqrt{x} = -x$ **b)** $3x + \sqrt{2x-2} = 2\sqrt{2x-2} + 23$ **c)** $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5$ **d)** $3\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{3(2x-1)}$

a) $\left(3\sqrt{x}\right)^2 = (2+x)^2 \Rightarrow 9x = 4 + x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = 1$ (soluciones válidas).

b) $(3x-23)^2 = \left(\sqrt{2x-2}\right)^2 \Rightarrow 9x^2 - 140x + 531 = 0 \Rightarrow x = 9$ (válida), $x = \frac{59}{9}$ (no válida).

c) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{2x+3}\right)^2 \Rightarrow x + 1 = 25 + 2x + 3 - 10\sqrt{2x+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(10\sqrt{2x+3}\right)^2 = (x+27)^2 \Rightarrow x^2 - 146x + 429 = 0 \Rightarrow x = 3$ (válida), $x = 143$ (no válida).

d) $\left(3\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(2\sqrt{3(2x-1)}\right)^2 \Rightarrow 27x - 9 = 24x - 12 \Rightarrow x = -1$ (no válida).

83. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{2 + \sqrt{x-4}} = \sqrt{12-x}$ **b)** $\frac{\sqrt{2x-1}}{4} = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ **c)** $4x - 5 + \sqrt{6x^2 - 24x + 25} = 0$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{x-4}}\right)^2 = \left(\sqrt{12-x}\right)^2 \Rightarrow 2 + \sqrt{x-4} = 12 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = (10-x)^2 \Rightarrow x^2 - 21x + 104 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ (válida)} \\ x = 13 \text{ (no válida)} \end{cases}$

b) Quitando denominadores: $2x - 1 = 12 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$ (válida)

c) $\left(-\sqrt{6x^2 - 24x + 25}\right)^2 = (4x-5)^2 \Rightarrow 6x^2 - 24x + 25 = 25 + 16x^2 - 40x \Rightarrow 10x^2 - 16x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (válida)} \\ x = \frac{8}{5} \text{ (no válida)} \end{cases}$

d) $\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{x - x^2} = x - 1 \Rightarrow 4x - 4x^2 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow 5x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = \frac{1}{5}$ (no válidas)

84. Resuelve la ecuación $\sqrt{x} = \sqrt[4]{36+5x}$.

$\left(\sqrt{x}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{36+5x}\right)^4 \Rightarrow x^2 = 36+5x \Rightarrow x^2 - 36 - 5x = 0 \Rightarrow x = -4$ (no válida), $x = 9$ (válida)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

85. *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = \log 2 - \log 4$

b) $2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1$

c) $\log\left(65 - x^3\right) = 3\log(5-x)$

d) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3}$

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}} = 10\sqrt{x}$

f) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5$

g) $\log\sqrt{7x+51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x-67}$

a) $\log x = \log 2 - \log 4 \Rightarrow \log x = \log 0,5 \Rightarrow x = 0,5$ (solución válida).

b)

$2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1 \Rightarrow \log\dfrac{(2x-2)^2}{x-1} = \log 10 \Rightarrow \dfrac{(2x-2)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow \dfrac{4(x-1)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow 4(x-1) = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$ (solución válida)

c) $\log\left(65 - x^3\right) = 3\log(5-x) \Rightarrow \log\left(65 - x^3\right) = \log(5-x)^3 \Rightarrow 65 - x^3 = (5-x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 65 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3 \Rightarrow 15x^2 - 75x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$ (soluciones válidas).

d) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3} \Rightarrow \log x = \log\left(6\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right) \Rightarrow x = \dfrac{6x^2}{9} \Rightarrow 6x^2 = 9x \Rightarrow 3x(2x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ (solución válida), $x = 0$ (solución no válida).

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}} = 10\sqrt{x} \Rightarrow 10^{10\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{20x+320}} \Rightarrow 10\sqrt{x} = \sqrt{20x+320} \Rightarrow 100x = 20x + 320 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{320}{80} = 4$ (solución válida)

f) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5 \Rightarrow \log_x(8\cdot 4) = -5 \Rightarrow x^{-5} = 32 = 2^5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (solución válida)

g) $\log\sqrt{7x+51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x+67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10} = \log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x+51}}{10} = \dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2 + 571x + 3417 = 8100 \Rightarrow 14x^2 + 571x - 4683 = 0 \Rightarrow x = 7$ (solución válida), $x = -\dfrac{669}{14}$ (solución falsa)

86. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2\left(x^2+1\right)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -\frac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^2\right)^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

Si $z = 3^x \Rightarrow z^2 + 5z - 24 = 0 \Rightarrow z = 3,\ z = -8 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -8 \Rightarrow 3^x = -8 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \frac{9^x}{9} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \frac{\left(3^x\right)^2}{9} = 90$

Si $z = 3^x \Rightarrow 9z + \frac{z^2}{9} = 90 \Rightarrow z^2 + 81z - 810 = 0 \Rightarrow z = 9, z = -90 \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -90 \Rightarrow 3^x = -90 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + \frac{\left(3^x\right)^2}{3} + \frac{3^x}{3} = 111$

Así,

$z = 3^x \Rightarrow z^2 + \frac{z^2}{3} + \frac{z}{3} = 111 \Rightarrow 4z^2 + z - 333 = 0 \Rightarrow z = 9,\ z = -\frac{37}{4} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -\frac{37}{4} \Rightarrow 3^x = -\frac{37}{4} \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

87. Comprueba en cada caso si los valores indicados forman una solución de los sistemas dados.

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\quad x=2,\ y=1$

b) $\begin{cases} x-2y-6z=2 \\ x+y+z=0 \\ -2x+y+3z=-4 \end{cases}$ $\quad x=2,\ y=1,\ z=1$

a) No, porque no verifica la 2.ª ecuación

b) No, porque no verifica la 1.ª ecuación.

88. Comprueba que todas las ternas de números reales $(t,\ t,\ 3t-4)$, siendo t cualquier número real, son soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2t-3t+4=4 \\ -t+t=0 \\ 3t-3t+4=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 0=0 \\ 4=4 \end{cases}$ Al verificarse las tres ecuaciones, las ternas son solución.

89. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-3y=\frac{7}{3} \\ \frac{1}{5}x-\frac{3}{4}y=\frac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(2x+y)-3(3x-2y)=-34 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3(2x+y)=-1 \\ \frac{x}{2}+3y=14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{3}{y+1}=-1 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y+1}=\frac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=13 \\ -19y=57 \end{cases} \Rightarrow y=-3,\ x=2$ x = 2, y =–3

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-3y=\frac{7}{3} \\ \frac{1}{5}x-\frac{3}{4}y=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ 4x-15y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ -3y=2 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{2}$

c) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2}+3=2x+10 \Rightarrow x=-\frac{13}{3},\ x=\frac{4}{3}$

d) $\begin{cases} 4x+2y-9x+6y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+8y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2,\ y=-3$

e) $\begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x+6y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x=28-6y \end{cases} \Rightarrow 8(28-6y)+3y=-1 \Rightarrow y=5,\ x=-2$

f) $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y+1} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=-1 \\ 2a+b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2, y=1$

90. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -2x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 15 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2y^2}{3} = -\dfrac{61}{24} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2(6y - 6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2, y = \dfrac{-2}{73}$

Luego $y = 2, x = 6$, $y = \dfrac{-2}{73}, x = -\dfrac{450}{73}$. Es un sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} -3x \cdot \dfrac{7 + 4x}{5} - 2x^2 = -26 \\ y = -\dfrac{7 + 4x}{5} \end{cases} \Rightarrow -22x^2 - 21x + 130 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{65}{22}$

Luego $x = 2, y = -3$, $x = -\dfrac{65}{22}, y = \dfrac{53}{55}$. Es un sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -2x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = -4 \\ -6x^2 + 12y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$

Luego $x = 1, y = 1$, $x = 1, y = -1$, $x = -1, y = 1$, $x = -1, y = -1$. Es un sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 6x + y = 30 \\ 2y + 3x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 6x \\ 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ x = \dfrac{5}{2}$

Luego $x = 4, y = 6$, $x = \dfrac{1}{2},\ y = 15$.

e) $\begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ x = \dfrac{30 - 2y}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{900 + 4y^2 - 120y}{9} - 2y^2 + \dfrac{120y - 8y^2}{3} = 36 \Rightarrow y = 6, y = \dfrac{102}{23}$

Luego $y = 6, x = 6$, $y = \dfrac{102}{23}, x = \dfrac{162}{23}$. Es un sistema compatible determinado.

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2y^2}{3} = -\dfrac{61}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x^2 + 3y^2 = 8 \\ 12x^2 - 16y^2 = -61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -48x^2 + 9y^2 = 24 \\ 48x^2 - 64y^2 = -244 \end{cases} \Rightarrow 55y^2 = 220 \Rightarrow y = \pm 2$.

Luego $y = 2,\ x = \dfrac{1}{2};\ y = 2,\ x = -\dfrac{1}{2};\ y = -2,\ x = \dfrac{1}{2};\ y = -2,\ x = -\dfrac{1}{2}$. Es un sistema compatible determinado.

91. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \sqrt{x} - 3y = 2 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y-1} = 2 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x^2-3} + y = \dfrac{7}{2} \\ 3x - y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x - y = -5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2y} = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 0 \\ 2x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sqrt{x} - 3y = 2 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9y^2 + 12y + 4 \\ x = \dfrac{1}{2}y + 4 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + \dfrac{23}{2}y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0,\ x = 4 \text{ (válida)} \\ y = -\dfrac{23}{18},\ x = \dfrac{121}{36} \text{ (no válida)} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y-1} = 2 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 4x^2 + 4 - 8x \\ y = \dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2}x + 3 = 4x^2 + 4 - 8x \Rightarrow \begin{cases} x = 2,\ y = 5 \text{ (válida)} \\ x = \dfrac{1}{8},\ y = \dfrac{65}{16} \text{ (no válida)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x^2-3} + y = \dfrac{7}{2} \\ 3x - y = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12 = \dfrac{49}{4} + y^2 - 7y \\ x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow 4\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{y}{3}\right)^2 - 12 = \dfrac{49}{4} + y^2 - 7y \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2},\ x = 2 \text{ (válida)} \\ y = \dfrac{183}{10},\ x = \dfrac{38}{5} \text{ (no válida)} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 + y - 10\sqrt{y} \\ x = y - 5 \end{cases} \Rightarrow y - 5 = 25 + y - 10\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 \Rightarrow x = 4, y = 9$

e) $\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2y} = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{2(2x-4)} = 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = 3, y = 2; x = 27, y = 50$ (no son válidas). El sistema no tiene solución.

f) $\begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 0 \\ 2x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1; x = \dfrac{1}{4}, y = 4$

92. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando si son compatibles o incompatibles, y escribiendo todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases} \Rightarrow$ $y=2$, $z=1$, $x=2$. C. determinado

b) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases}$. Incompatible.

c) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$ $z=t$, $y=2-2t$, $x=6t$. C. indeterminado

d) $\begin{matrix} E_2-5E_1 \\ E_3-6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases}$. Incompatible.

e) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} E_3-2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases}$ $z=t$, $y=t-2$, $x=-t$. C. indeterminado

f) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} 5E_3-3E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases} \Rightarrow$ $z=-2$, $y=0$, $x=2$. C. determinado

93. *Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+z^2=10} \\ \boldsymbol{y^2+z^2=13} \\ \boldsymbol{x^2+2y-6z=-13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=13 \\ x^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=10-z^2 \\ y^2=-z^2+13 \\ 10-z^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=13-z^2 \\ y=\dfrac{z^2+6z-23}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{z^2+6z-23}{2}\right)^2=13-z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^4+12z^3-6z^2-276z+477=0 \Rightarrow (z-3)(z^3+15z^2+39z-159)=0$$

La única solución entera del polinomio es $z=3$, y con ella: $z=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{13-3^2}=\pm 2$; $x=\pm\sqrt{10-3^2}=\pm 1$

Las soluciones son las ternas: $x=1$, $y=2$, $z=3$; $x=-1$, $y=2$, $z=3$, ya que las ternas formadas con el valor $y=-2$ no son válidas al no verificarse la tercera ecuación.

94. Resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5\cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15\cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3\cdot 5^{x+1} + 2\cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + B = 11 \\ A^2 + B^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 9 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 2 \\ A = 9 \;\; B = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2} \quad y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5\cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + 6B = 8 \\ \dfrac{5}{2}A + B^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 1 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 0 \\ A = -76 \;\; B = 14 \text{ Sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15\cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3\cdot 5^{x+1} + 2\cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$. Si $A = 5^x, B = 6^y \Rightarrow \begin{cases} 15A - 6B = 339 \\ 15A + 72B = 807 \end{cases} \Rightarrow A = 25, B = 6 \Rightarrow x = 2, y = 1$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x = 3y - 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{3y-1} + 3^{y+1} = 18$. Si $z = 3^y \Rightarrow \dfrac{1}{3}z^3 + 3z = 18 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 1, x = 2$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{33 - y}{y} = 10 \Rightarrow 33 - 11y = 0 \Rightarrow y = 3, \; x = 30$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow 100y^2 + y^2 = 29 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}} \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{\dfrac{29}{101}}, y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ \dfrac{100y}{x} = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ \dfrac{1000}{x^2} = 250 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 5$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 (y+2)^3 = 100 \\ (x-2)^4 (y+2)^5 = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow y = 10^5 - 2, x = 10^{-\frac{13}{2}} + 2$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x = 2y + 24 \end{cases} \Rightarrow x = 30, y = 3$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 70 + 3x \\ \dfrac{y}{x^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{14}{5}, y = \dfrac{392}{5}; x = -\dfrac{5}{2}, y = \dfrac{125}{2}$

95. Calcula el valor de *k* para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones. Para ese valor, escribe dichas soluciones.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-2z=4} \\ \boldsymbol{2x+5y-2z=10} \\ \boldsymbol{4x+9y-6z=k} \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=k-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0\,z=k-18 \end{cases}$

Para $k=18$, se obtiene la ecuación $0 \cdot z=0$, que se verifica para cualquier valor de z.

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por las fórmulas: $\begin{cases} x=4+2\lambda-2(2-2\lambda)=6\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

96. Calcula los valores de *k* para que el siguiente sistema sea incompatible: $\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-3z=3} \\ \boldsymbol{3x-2y+z=7} \\ \boldsymbol{5x+2y-5z=k} \end{cases}$ **.**

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=k-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ 0\,z=k-13 \end{cases}$

Cuando $k\neq 13$, la última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

97. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+3y-2z+2w=12} \\ \boldsymbol{2x-2y-z+w=5} \\ \boldsymbol{3x+y-2z-4w=16} \\ \boldsymbol{3x-3z-3w=15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ -8y+4z-10w=-20 \\ -9y+3z-9w=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -3z-45w=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -66w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w=0 \\ z=-1 \\ y=2 \\ x=4 \end{cases}$$

98. Dado el sistema lineal de ecuaciones dependientes del parámetro real *a*: $\begin{cases} \boldsymbol{x+ay+z=1} \\ \boldsymbol{2y+az=2} \\ \boldsymbol{x+y+z=1} \end{cases}$

a) Discute el sistema para los distintos valores de *a*. **b)** Resuelve el sistema para a = 3 y a = 1.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+ay+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+az=2 \\ (a-1)y=0 \end{cases}$

Si $a=1$, la tercera ecuación es $0=0$, luego es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Si $a=0$, el sistema es incompatible. Si $a\neq 1$ y $a\neq 0$, el sistema es compatible determinado con una única solución.

b) Si $a=3$, entonces la solución es: $y=0$, $z=\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$

Si $a=1$, entonces la solución es: $y=\lambda$, $z=2-2\lambda$, $x=1-\lambda-2+2\lambda=-1+\lambda$

Síntesis

99. Escribe una ecuación de segundo grado tal que una de sus raíces sea igual al doble de la otra.

Respuesta abierta, por ejemplo: Raíces: 2, 1. Ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

100. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus dos raíces sean inversas y su suma valga $\frac{10}{3}$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{10}{3} = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = 1 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \text{Si } a = 1 \Rightarrow x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

101. Escribe una ecuación de tercer grado tal que tenga como soluciones $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $(x+2)(x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

102. Escribe una ecuación bicuadrada tal que sus únicas soluciones reales sean 1 y –1.

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$

103. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x + c = 0$.

b) Calcula el valor de c para que el producto de las soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -3$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = c$

b) $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = c = -18$

104. Halla la expresión de un polinomio $P(x)$ de segundo grado tal que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(-1) = 1$.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = c = 2 \\ P(1) = a + b + c = -1 \\ P(-1) = a - b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = -3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2,\ b = -1, c = 2$$

Luego: $P(x) = -2x^2 - x + 2$

105. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que: $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$, $P(-2) = -6$.

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = d = 0 \\ P(1) = a + b + c + d = 0 \\ P(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ P(x) = -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} E_2 + E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2b = 2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a + c = -1 \\ 8a + 2c = 10 \end{cases} E_4 + 2E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

El polinomio buscado es $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$.

106. Encuentra la solución de la ecuación: $5\log x = 3\log x + 2\log 6$

$5\log x = 3\log x + 2\log 6 \Rightarrow x^5 = 36x^3 \Rightarrow x = 0, x = -6$ (soluciones no válidas), $x = 6$ (solución válida).

107. Resuelve la siguiente ecuación: $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0$

$13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

108. Resuelve el siguiente sistema por tres métodos.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 5x - y = 19 \end{cases}$$

La solución por cualquiera de los métodos es: $x = 3, y = -4$.

CUESTIONES

109. Demuestra que la ecuación $x^2 - ax - a^2 = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor de *a* no nulo.

$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2 > 0$ para cualquier $a \neq 0$.

110. Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7 y el producto –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2 + 1 = 0$ **b)** $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

111. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 4x - 4 = 0$ con las de la ecuación $-4x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 2 = 0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2 + bx + 1 = 0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

a) Las soluciones de la primera son $x = 2$ y $x = -\frac{2}{3}$, y las de la segunda, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$. Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) Las soluciones de la primera son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2}$, y las de la segunda, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{4}$, que son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2-8}}{2} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2-8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

De la misma forma: $\frac{-b - \sqrt{b^2-8}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2-8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

c) En efecto, son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$.

Y de la misma forma con la otra pareja de soluciones.

112. **a)** Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como única solución la (0,0).

b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones entre las que se encuentre la (0,0)

a) Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

113. **a)** Escribe una ecuación racional que no tenga ninguna solución.

b) Escribe una ecuación bicuadrada que no tenga ninguna solución.

c) Escribe una ecuación irracional que no tenga ninguna solución.

a) $\dfrac{x^2+1}{x+1} = 0$ **b)** $(x^2+1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **c)** $\sqrt{x} = -3$

PROBLEMAS

114. La suma de tres números pares consecutivos es 1242. ¿Cuáles son esos números?

Números: x, $x+2$, $x+4$

$x + x + 2 + x + 4 = 1242 \Rightarrow 3x = 1236 \Rightarrow x = 412$. Los números son: 412, 414 y 416.

115. Calcula dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 545.

Números: x, $x+1$

$x^2 + (x+1)^2 = 545 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 544 = 0 \Rightarrow x = -17$ (solución no válida), $x = 16$ (solución válida).

Los dos números son: 16 y 17.

116. Un triángulo rectángulo está formado por tres lados cuyas longitudes son números consecutivos. ¿Cuánto miden los lados de dicho triángulo?

Lados: x, $x+1$, $x+2$

$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ (solución no válida), $x = 3$ (solución válida).

Las longitudes de los lados son: 3, 4 y 5.

117. La suma de los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es 1570. Calcula el valor del siguiente impar.

Números impares desconocidos: $2x+1$, $2x+3$. El siguiente impar es $2x+5$.

$(2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 1570$. Luego $x = 13$, $x = -15$ (solución no válida). El siguiente impar es $2 \cdot 13 + 5 = 31$.

118. Al dividir dos números que suman 147 se obtiene 5 de cociente y 9 de resto. ¿Cuáles son esos números?

Los números son x e y. Suponemos que x es mayor que y.

$\begin{cases} x + y = 147 \\ x = 5y + 9 \end{cases}$ cuyas soluciones son $x = 124$ e $y = 23$. Los números son: 124 y 23.

119. Dos capitales iguales se colocan al 3% y al 4%, respectivamente, durante un año. El segundo capital produce 12,50 euros más de intereses que el primero. ¿A cuánto ascendían los capitales iniciales iguales?

Sea C el capital: $0{,}04C - 0{,}03C = 12{,}5 \Rightarrow C = 1250$ €.

120. Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de cinco años sólo tendrá tres veces la edad de ella. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y la hija?

	E. Actual	E. dentro de 5 años
Hija	x	$x+5$
Padre	$4x$	$4x+5$

$4x + 5 = 3(x+5) \Rightarrow x = 10$

Edad actual del padre 40 años, edad actual de la hija 10 años.

121. Hace tres años, las edades de dos personas estaban en la proporción 6 : 1, y dentro de seis años estarán en la proporción 3 : 1. ¿Cuáles son las edades que tienen ahora ambas personas?

	Hace tres años	Actual	Dentro de seis años
Persona *A*	$6x$	$6x+3$	$6x+9$
Persona *B*	x	$x+3$	$x+9$

$6x + 9 = 3(x+9) \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Actualmente, las edades son de 39 y 9 años respectivamente.

122. Ernesto ha comprado un ordenador de sobremesa por valor de 400 €. A la hora de pagar, ha utilizado 32 billetes, unos de 20 € y otros de 5 € ¿Cuántos billetes de cada cantidad ha entregado?

Llamamos: x= número de billetes de 20 €, y= número de billetes de 5 €.

$\begin{cases} x + y = 32 \\ 20x + 5y = 400 \end{cases}$ La solución del sistema es: x= 16 e y= 16.

Ha entregado 16 billetes de 20 € y 16 billetes de 5 €.

123. Halla una fracción tal que se cumpla que si al numerador y al denominador se les suma una unidad, la fracción equivale a $\frac{1}{3}$, y si se les restan 3 unidades, equivale a $\frac{1}{5}$.

Llamamos x al numerador e y al denominador.

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x-3}{y-3} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = y + 1 \\ 5x - 15 = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 23$$

La fracción es $\frac{7}{23}$.

124. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Por cada uno de los televisores del primer tipo, de gama baja, paga 350 €; por los del segundo, de gama media, 650 € y, finalmente, por los del tercero, de gama alta, 1150 €.

Un pedido de 240 unidades tiene un importe de 160 000 €. Determina el número de televisores pedidos sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Llamamos: x, y, z al número de televisores de gama baja, media y alta, respectivamente.

$\begin{cases} x + y + z = 240 \\ 350x + 650y + 1150z = 160000 \\ y = 2(x+z) \end{cases} \Rightarrow x = 45, y = 160, z = 35$. Luego se han pedido 45 televisores de gama baja, 160 televisores de gama media y 35 televisores de gama alta.

125. Un ciclista realiza un trayecto a la velocidad de 12 km/h. En cierto momento se le pincha una rueda, por lo que debe regresar andando a una velocidad de 4 km/h. Calcula a qué distancia del punto de partida se le pinchó la rueda, sabiendo que el tiempo total que invirtió entre la ida y la vuelta fue de dos horas y media.

Sea x la distancia en kilómetros desde el punto de salida hasta el lugar donde pinchó.

Tiempo invertido en la ida: $\frac{x}{12}$. Tiempo invertido en la vuelta: $\frac{x}{4}$.

$\frac{x}{12}+\frac{x}{4}=2,5 \Rightarrow \frac{4x}{12}=2,5 \Rightarrow x=7,5$ km. Se le pinchó la rueda a 7, 5 km del punto de partida.

126. Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de un producto *B*. Mezclando ambos productos se obtienen esencias diferentes.

Se quieren preparar dos clases de perfume, la primera, más barata, debe llevar tres partes de *A* y una de *B*, y la segunda clase, de mayor calidad, debe llevar los productos A y B al 50 % .

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

En el dibujo del enunciado se observa que el perfume más barato se vende a 50 €/L y el otro a 60 €/L.

a) Sean x= litros que se prepararán de la primera clase, y= litros que se prepararán de la segunda.

$\begin{cases} \frac{3x}{4}+\frac{y}{2}=600 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=400 \end{cases} \Rightarrow x= 400,\ y= 600$. Se podrán preparar 400 litros de la primera clase de perfume y 600 litros de la segunda clase de perfume.

b) Se obtendrá un ingreso total de $400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56\,000$ €.

127. Se quiere construir un marco rectangular para adornar una fotografía. Para ello se dispone de un listón de madera de 50 cm de longitud.

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el área encerrada por el marco con la longitud de uno de sus lados.

b) Determina las dimensiones del marco si se quiere que el área sea de 156 cm^2.

a) Sean a y $25 - a$ las medidas de los dos lados del rectángulo. Área: $S= 25a - a^2$.

b) $25a - a^2= 156$, de soluciones a=13, a= 12.Luego las dimensiones serán 12 y 13 cm.

128. En un hotel turístico tienen un total de 36 habitaciones con 60 camas. Sólo existen habitaciones individuales y dobles. Calcula el número de habitaciones de cada tipo que hay.

Sea x el número de habitaciones individuales e y el de dobles.

$\begin{cases} x+y=36 \\ x+2y=60 \end{cases} \Rightarrow x=12, y=24$. Hay 12 habitaciones individuales y 24 habitaciones dobles.

129. Un joyero compra dos anillos de oro por un total de 825 € y los vende por 863,75 € Calcula cuánto pagó por cada anillo si en la venta del primero ganó un 15% y en la del segundo perdió un 5%.

Sea x el precio en euros del primer anillo e y el precio en euros del segundo anillo.

$\begin{cases} x+y=825 \\ 1,15x+0,95y=863,75 \end{cases} \Rightarrow x=400, y=425$ .Pagó por el primer anillo 400 € y 425 € por el segundo anillo.

130. En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 €, pero el dependiente informa al cliente de que a los libros se les aplica una rebaja del 6 %, y a las pulseras, una rebaja del 12 %, por lo que en realidad debe pagar 31,40 €. ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera? ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

Sea x el precio inicial del libro e y el de la pulsera.

$$\begin{cases} 0,94x + 0,88y = 31,4 \\ x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 25 .$$

Los productos marcaban 10 € el libro y 25 € la pulsera. Finalmente, 9,40 € y 22 €,respectivamente.

131. Un coche sale de un punto *A* a una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante, otro coche sale a su encuentro desde un punto *B* situado a 10 km detrás de *A* y a una velocidad de 115 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en darle alcance?

El primer coche recorre x km a una velocidad de 90 km/h. El segundo coche recorre x+10 km a 115 km/h.

El tiempo que están circulando es el mismo: $\frac{x}{90} = \frac{x+10}{115}$, luego x=36 km.

El tiempo que tarda en dar alcance el segundo coche al primero es $\frac{36}{90} = 0,4\,\text{h} = 24\,\text{min}$.

132. Un coche sale de *A* en dirección a *B* a una velocidad de 80 km/h. Tres minutos después, otro coche sale de *B* en dirección a *A* a una velocidad de 100 km/h. Calcula en qué punto se encontrarán los dos coches si *A* y *B* distan 22 km.

El primer coche está circulando durante $\frac{x}{80}$. El segundo coche está circulando durante $\frac{22-x}{100}$.

El segundo sale 3 minutos después: $\frac{x}{80} = \frac{22-x}{100} + \frac{3}{60} \Rightarrow x$= 12. Se encuentran a 12 km de *A*.

133. El área de un rectángulo es de 35 unidades cuadradas. Si se aumenta un lado en2 unidades y se disminuye el otro en 3 unidades, el área disminuye en 17 unidades cuadradas. Halla las dimensiones del rectángulo inicial.

Sean x, y las dimensiones iniciales.

$$\begin{cases} xy = 35 \\ (x+2)(y-3) = 35-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 35 \\ -3x + 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{-11+3x}{2}\right) = 35 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 70 = 0 \Rightarrow x = 7 \text{, (solución válida)}$$

$x = \frac{-10}{3}$ solución no válida. Si $x = 7$, entonces $y = 5$ .Luego las dimensiones son 7 y 5 cm.

134. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total y Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 CENT por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Sea x el número de panfletos repartidos por Julia; y, los repartidos por Clara, y z, por Miguel.

$$\begin{cases} y = 0,20(x+y+z) \\ x + y = 850 \\ z = 100 + x \end{cases} \Rightarrow x = 550, y = 300, z = 650$$

El dinero que recibe cada uno es: Julia: 550 · 0,01 = 5,50 €; Clara, 300 · 0,01 = 3 €; Miguel, 650 · 0,01 = 6,50 €.

135. Un técnico informático espera obtener 360 € por la reparación de varios equipos. El técnico se da cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4,50 € el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?

Sea x el número de ordenadores que, en principio, debe reparar. Por cada uno cobrará $\frac{360}{x}$ €.

$$\left(\frac{360}{x}+4,5\right)(x-4)=360 \Rightarrow 360-\frac{1440}{x}+4,5x-18=360 \Rightarrow 4,5x^2-18x-1440=0 \Rightarrow$$

$x=20$, $x=-16$ (solución no válida).

Al principio, tenía 20 ordenadores para reparar y cobraba $\frac{360}{20}=18$ € por cada reparación, ahora cobrará 22,50 €.

136. A primera hora de la mañana, en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10 €, 20 € y 50 €) con un valor total de 16 000 €. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 billetes de 20 €:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber.

b) Resuélvelo por el método de Gauss.

Sea x el número de billetes de 10 €, y el de 20 € y z el de 50 €.

$$\begin{cases} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ 4z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\quad y+\quad z=800 \\ \qquad 3y-\quad 4z=0 \\ 10x+20y+50z=16\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\quad z=800 \\ \quad 3y-\quad 4z=0 \\ \quad 10y+40z=8000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+\quad z=800 \\ \quad 3y-4z=0 \\ \qquad 160z=24\,000 \end{cases}$$

Luego $z=150$, $y=200$, $x=450$. Se necesitan 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

137. Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: *A*, *B* y *C*. Del tipo *A* tiene 30 unidades menos que de la totalidad de *B* más *C*, y del tipo *C* tiene el 35% de la suma de *A* más *B*. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

$$\begin{cases} A+B+C=270 \\ A=B+C-30 \\ C=0,35(A+B) \end{cases} \Rightarrow A=120, B=80, C=70$$

Hay 120 productos del tipo *A*, 80 productos del tipo *B* y 70 productos del tipo *C*.

138. La oferta y la demanda del mercado de un conjunto de ropa para practicar judo en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$$\boldsymbol{f_0=0,45p^2-20p+500}$$

$$\boldsymbol{f_d=0,1p^2-18,5p+1000}$$

Siendo $30 \le p \le 50$, en euros, calcula el punto de equilibrio de este mercado.

$$\begin{cases} f_o=0,45p^2-20p+500 \\ f_d=0,1p^2-18,5p+1000 \end{cases} \Rightarrow 0,35p^2-1,5p-500=0 \Rightarrow p=40$$

El punto de equilibro es 40 € y $f_o=f_d=420$.

139. La tabla muestra la oferta y la demanda del mercado de teléfonos móviles de cierto modelo para algunos valores del precio.

p	Unidades ofertadas	Unidades demandadas
150	725	1400
175	800	1100
200	1200	650

a) Calcula las expresiones de las funciones de oferta y demanda sabiendo que son polinomios de segundo grado con la indeterminada *p* variando entre 150 y 200 euros.

b) Calcula el punto de equilibrio del mercado.

a) Función de oferta: $f_o = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2 a + 150b + c = 725 \\ 175^2 a + 175b + c = 800 \\ 200^2 a + 200b + c = 1200 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{13}{50}, b = -\frac{163}{2}, c = 7100 \Rightarrow f_o = \frac{13}{50}p^2 - \frac{163}{2}p + 7100$$

Función de demanda: $f_d = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2 a + 150b + c = 1400 \\ 175^2 a + 175b + c = 1100 \\ 200^2 a + 200b + c = 650 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{25}, b = 27, c = 50 \Rightarrow f_d = -\frac{3}{25}p^2 + 27p + 50$$

b) Punto de equilibrio: $f_o = f_d \Rightarrow p = 100$ (solución no válida), $p = \frac{3525}{19} \simeq 186$ (solución válida). $f_o = f_d \simeq 929$

140. Una población pasa de 20 250 a 21 520 habitantes en los años 2010 y 2015. Utilizando el modelo de crecimiento exponencial de las poblaciones, calcula:

a) La tasa de crecimiento exponencial para ese periodo

b) La población que se estima para el año 2020 suponiendo que no varía la tasa de crecimiento

c) La población que había en 2003 considerando la tasa de crecimiento constante.

a) $21\,520 = 20\,250 e^{(2015-2010)\cdot r} \Rightarrow e^{5r} = \frac{21\,520}{20\,250} \Rightarrow 5r = \ln\left(\frac{21\,520}{20\,250}\right) \Rightarrow r = 0{,}012 \Rightarrow r\ \% = 1{,}2\ \%$

b) $P_F = 20\,250 e^{(2020-2010)\cdot 0{,}012} = 22\,832$ habitantes

c) $20\,250 = P_{2003} e^{(2010-2003)\cdot 0{,}012} \Rightarrow P_{2003} = \frac{20\,250}{e^{7\cdot 0{,}012}} = 18\,618$ habitantes

141. Calcula el tiempo necesario para que una población verifique las siguientes variaciones:

a) Que se doble, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es del 1,25 %.

b) Que se triplique, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es $r = 0{,}025$.

a) Utilizando la ecuación $P_f = P_i e^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 2P_i$, se obtiene *t*:

$$2P_i = P_i e^{0{,}0125t} \Rightarrow e^{0{,}0125t} = 2 \Rightarrow \ln\left(e^{0{,}0125t}\right) = \ln 2 \Rightarrow 0{,}0125t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}0125} = 55{,}45$$

Han de pasar 55,45 años para doblar la población.

b) Utilizando la ecuación $P_f = P_i e^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 3P_i$, se obtiene *t*:

$3P_i = P_i e^{0{,}025t} \Rightarrow e^{0{,}025t} = 3 \Rightarrow t = 43{,}94$. Han de pasar 43,94 años para triplicar la población.

142. Un campo de labranza cuya área es de 192 m^2 tiene forma rectangular y su perímetro mide 56 m.

a) Calcula las dimensiones de dicho campo de labranza. **b)** Calcula la medida de sus diagonales.

Sean *x*, *y* las dimensiones del campo de labranza.

$$\begin{cases} 2x+2y=56 \\ xy=192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ y=\dfrac{192}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2-28x+192 \Rightarrow x=12, x=16 \text{. Si } x=12 \Rightarrow y=16 \text{, si } x=16 \Rightarrow y=12$$

a) Las medidas son 12 m y 16 m. **b)** Las diagonales miden $\sqrt{12^2+16^2}=20$ m.

143. La siguiente tabla muestra la población en algunos países europeos (en millones de personas) en los años 2005 y 2013:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
2005	82,5	62,8	57,9	10,5	5,2
2013	80,5	65,6	59,7	10,5	5,4

a) Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población para todos estos países en el periodo de 2005 a 2013.

b) Ordena de mayor a menor estos países, según su crecimiento relativo de la población.

a) Utilizando la ecuación $P_f=P_ie^{rt}$ y despejando, en cada caso, el valor de *t*, se obtiene:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
TCE [2005 , 2013]	–0,0031	0,0055	0,0038	0,0000	0,0047

b) Francia – Finlandia – Italia – Portugal – Alemania

144. En una pequeña envasadora se han comprado 35 L de aceite de oliva virgen extra y aceite puro de oliva para realizar una mezcla. El precio por litro de aceite virgen extra es de 4 €, mientras que por el litro de aceite puro se han pagado 3,25 €.

a) ¿Cuántos litros de aceite de la segunda clase se tienen que tomar para que la mezcla tenga un precio de 3,50 € el litro si no se quiere obtener ningún beneficio?

b) Si se quiere obtener un beneficio del 10 %, ¿a cuánto deberá cobrarse el litro de la mezcla anterior?

a) Se mezcla 35 L de aceite virgen extra de 4 € el litro y *x* kg de aceite puro de 3,25 € el litro

Se obtiene $35+x$ litros de mezcla de aceites a 3,5 € el litro. Por tanto:

$$35\cdot 4+3,25x=(35+x)3,5 \Rightarrow 140+3,25x=122,5+3,5x \Rightarrow 0,25x=17,5 \Rightarrow x=\frac{17,5}{0,25}=70$$

Luego se deben tomar70 litros de aceite puros de oliva.

b) Para obtener un beneficio del 10 % se debe cobrar el litro de la mezcla a $1,1\cdot 3,5=3,85$ €

145. Se cuenta con un presupuesto de 7550 € para fabricar tres tipos de contenedores para reciclar basura. El volumen y peso máximo que pueden tener dichos contenedores para su almacenaje es de 43 m^3 y 3750 kg, respectivamente. La tabla siguiente muestra el volumen y peso de los contenedores de los tres tipos, así como su precio. Calcula cuántos de ellos se pueden fabricar de cada tipo si se quiere agotar el presupuesto y la capacidad de almacenaje.

	Volumen (m^3)	Peso (kg)	Precio (€)
TIPO I	1	100	250
TIPO II	2	175	300
TIPO III	1,5	125	275

Sean:*x*,*y*,*z* el número de contenedores de tipo I, de tipo II y de tipo III, respectivamente.

$$\begin{cases} x+2y+1,5z=43 \\ 100x+175y+125z=3750 \\ 250x+300y+275z=7550 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=10, z=12$$

Se deben fabricar 5 contenedores de tipo I, 10 de tipo II y 12 de tipo III

146. En una clase de primero de bachillerato hay tantos alumnos que estudian Tecnologías de la Información y Comunicación como alumnos que estudian Literatura Universal; sin embargo, el número de alumnos que estudian Francés como segunda lengua extranjera es inferior en una unidad al de los que estudian Tecnologías de la Información y la Comunicación. A partir de estos datos, calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas

Sean:

x: número de alumnos de Tecnologías de la Información y Comunicación

y: número de alumnos de Literatura Universal

z:número de alumnos de Francés

$$\begin{cases} x = y \\ z = x - 1 \\ x + y + z = 35 \end{cases} \Rightarrow x + x + x - 1 = 35 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12 \text{ Luego, } \ y = 12 \ , \ z = 11 .$$

Por tanto 12 alumnos cursan Tecnologías de la Información y Comunicación y 12 alumnos cursan Literatura Universal y 11 alumnos cursan Francés.

147. Para construir una caja sin tapa se recortan cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una cartulina de 30cm ×20 cm. Calcula el lado de los cuadrados para que el volumen de la caja sea de 832 cm³.

Medidas de la caja: *x*, 30 – 2*x*, 20 – 2*x*. $V = x(30-2x)(20-2x) = 832 \Rightarrow x = 2$ .Los cuadrados son de lado 2 cm.

148. Un ciclista realiza un recorrido de ida y vuelta de 70 km en total. El primer tramo del recorrido es de subida, luego hay uno de bajada y un tercero llano. Tarda 1 h 47 min 37 s al ir y 1 h 25 min al volver, haciendo el recorrido a la inversa. Si la velocidad de subida es de 10 km/h, la de bajada, 40 km/h y en llano avanza a 30 km/h. ¿Qué distancia tiene cada tramo del recorrido?

	Subida	Bajada	Llano
Ida	*x*	*y*	35 –*x*–*y*
Vuelta	*y*	*x*	35 –*x*–*y*

$$\begin{cases} 1{,}794 = \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{40} + \dfrac{35 - x - y}{30} \\ 1{,}417 = \dfrac{35 - x - y}{30} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{40} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5269}{525}, y = \frac{526}{105}$$

Aproximadamente, el primer tramo tiene 10 km, el segundo tramo tiene 5 km y el tercer tramo 20 km.

149. Un globo que posee un pequeño motor realiza un viaje desde el punto *A* hasta el punto *B*, ida y vuelta. Gracias al motor, el globo adquiere una velocidad de 38 km/h. Supongamos, sin embargo, que el viento sopla de forma constante, y siempre en la dirección de *A* hacia *B*, y que, por tanto, la velocidad se modifica. La distancia que separa los puntos es de50 km.

a) Calcula la duración total del viaje en función de la velocidad con la que sopla el viento en la dirección indicada.

b) Calcula la velocidad del viento sabiendo que la duración total del viaje ha sido de 195 minutos.

Sea *x* la velocidad del viento en km/h.

a) Tiempo invertido en la ida: $T_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38 + x}$, y en la vuelta: $T_2 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38 - x}$.

$$T = \frac{50}{38 + x} + \frac{50}{38 - x} = \frac{3800}{1444 - x^2} .$$

Luego la duración total del viaje en función de la velocidad es: $\dfrac{3800}{1444 - x^2}$ horas.

b) Duración del viaje: 195 min = 3,25 h. Luego: $3{,}25 = \dfrac{3800}{1444 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{1444 - \dfrac{3800}{3{,}25}} \simeq 16{,}6$ km/h.

150. Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentido opuesto se encuentran cada 10 s, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza a otro cada 170 s. Sabiendo que la pista tiene una longitud de 170 m, ¿cuál es la velocidad de cada ciclista?

Sea x la velocidad del primer ciclista e y la del segundo ciclista.

$$\begin{cases} 10(x+y)=170 \\ 170(x-y)=170 \end{cases} \Rightarrow x=9, y=8.$$

Luego las velocidades son de 9 m/s el primer ciclista y 8 m/s el segundo ciclista.

151. Las funciones de demanda y de oferta correspondientes al mercado del último juego de estrategia, en cierto momento, son:

$$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180 \qquad\qquad f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A$$

donde A es un parámetro desconocido y $40 \le p \le 100$ €.Calcula el valor de A para que el equilibrio del mercado se alcance para 100 unidades demandadas. En este caso, halla la cantidad ofertada y el precio.

$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180=100 \Rightarrow -\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+80=0 \Rightarrow p=45,31$, única solución válida y precio del producto.

$$f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A \Rightarrow A=100-\frac{13}{120}\cdot 45,31^2+12\cdot 45,31=421,31.$$

152. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2, calcula, en función de a, b y c, el valor de la suma de las inversas de sus raíces.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con la *pizza*

Miguel y Liliana tienen un pequeño restaurante italiano donde, además de las comidas que sirven en el local, sirven *pizzas*.

Miguel lleva la contabilidad de la empresa y observa que, de media, consigue vender 150 raciones de *pizzas* a un precio de 3 € cada ración.

Liliana acaba de terminar sus estudios de ciencias empresariales y, llena de energía y optimismo ha decidido aplicar sus conocimientos para intentar dar un nuevo impulso al negocio, ya que está convencida de que, pese al entusiasmo y buena voluntad que pone Miguel los resultados son manifiestamente mejorables.

Con gran minuciosidad realiza un estudio de mercado entre los vecinos del barrio y los barrios colindantes al suyo. Además observa a la competencia de la zona, y una vez segura de que nadie supera la calidad de sus *pizzas*, decide centrarse en el factor económico. Ha observado que por cada 15 CENT que se baje en el precio de la ración, la demanda de la misma aumenta en 30 unidades. Es decir, si baja el precio a 2,85 € la ración, conseguirá vender 180 raciones.

Liliana supone que la regla obtenida es cierta, al menos así lo dice la teoría, y se cumple siempre que el precio esté comprendido entre 1,50 € y 3 €.

a) Calcula el ingreso total que obtendrán Liliana y Miguel si no cambian los precios de las raciones.

b) Calcula el ingreso total que obtienen si venden cada ración a 2,70 €.

c) Si rebajan el precio a 0,15*x* €, calcula, en función de *x*, el ingreso total que obtienen.

d) Miguel ha calculado que para que les sea rentable el negocio, de la parte de la venta de pizzas deberían obtener unos ingresos de 702 € en total. ¿A qué precio deben vender las porciones?

a) $I = 150 \cdot 3 = 450$ €.

b) Si fijan el precio en 2,70 euros, venderán 150 + 2 · 30 = 210 raciones. Por tanto: $I = 210 \cdot 2{,}70 = 567$ €.

c) Si rebajan el precio 0,15x euros, se venderán 150 +30 *x* raciones. Por tanto:

$$I = (150 + 30x) \times (3 - 0{,}15x) = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 \text{ €}$$

d) $I = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 = 702 \Rightarrow 4{,}5x^2 - 67{,}5x + 252 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 7 \end{cases}$

Hay dos soluciones:

x = 7. Se venderán 150 + 7 · 30 = 360 raciones a 3 − 7 · 0,15 = 1,95 € la ración.

x = 8. Se venderán 150 + 8 ·v30 = 390 raciones a 3 − 8 · 0,15 = 1,80 € la ración.

Se deberá elegir la primera ya que los costes serían, evidentemente, inferiores.

Fabricando papel

Una fábrica de productos de papelería elabora tres tipos de cuadernos:

- **Tipo 1: Cuaderno de 100 folios de 80 gramos (80 gramos por metro cuadrado).**
- **Tipo 2: Cuaderno de 80 folios de 90 gramos.**
- **Tipo 3: Cuaderno de 120 folios de 100 gramos.**

Para su elaboración, cada cuaderno debe pasar por tres departamentos diferentes: departamento de tratamiento de la pasta de papel, departamento de encuadernación y departamento de supervisión del producto.

La tabla de la derecha muestra los minutos que debe estar cada tipo de cuaderno en cada uno de los departamentos así como el total de minutos diarios

con los que cuenta cada departamento para realizar su trabajo.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	
Tratamiento	6	5	8	780 min
Encuadernación	5	4	6	610 min
Supervisión	1	1	2	170 min

a) Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en el que las incógnitas sean el número de cuadernos de cada tipo que se pueden fabricar al día para agotar exactamente la disponibilidad de tiempo de los departamentos.

Con ayuda de un programa de cálculo:

b) Resuelve el anterior sistema e interpreta los resultados.

c) Sin variar las condiciones, ¿cuántos cuadernos de tipo 1 y tipo 2 se deberán fabricar si se quieren fabricar 35 cuadernos de tipo 3 y agotar la disponibilidad de tiempo?

d) Si la empresa decide aumentar en un 10 % el tiempo disponible de los departamentos de tratamiento y encuadernación y en un 15 % el del departamento de supervisión, ¿cómo variará la solución del problema?

a) Sean:

x el número de cuadernos de Tipo 1, *y* el número de cuadernos de Tipo 2 y *z* el número de cuadernos de Tipo 3.

$$\begin{cases} 6x + 5y + 8z = 780 \\ 5x + 4y + 6z = 610 \\ x + y + 2z = 170 \end{cases}$$

b) El sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones pueden expresarse de la forma:

$$\begin{cases} x = -70 + 2t \\ y = 240 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

c) $z = t = 35 \Rightarrow x = 0 \quad y = 100$

Se fabricarán 100 cuadernos de Tipo 2 y 35 de Tipo 3

d) Aplicando las variaciones se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 5y + 8z = 780 \cdot 1{,}1 = 858 \\ 5x + 4y + 6z = 610 \cdot 1{,}1 = 671 \\ x + y + 2z = 170 \cdot 1{,}15 = 195{,}5 \end{cases} \Rightarrow E_2 \to E_1 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 5y + 8z = 858 \\ x + y + 2z = 187 \\ x + y + 2z = 195{,}5 \end{cases}$$

En este caso, el sistema no tiene solución.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las ecuaciones

a) $-2\cdot\dfrac{3x-1}{25}-\dfrac{4x-1}{5}=x+\dfrac{7}{25}$ **b)** $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{12}+\dfrac{x+3}{2}=2x-\dfrac{1}{6}$ **c)** $\dfrac{2x-1}{x+7}-\dfrac{2x+1}{x-7}=\dfrac{5}{8}$ **d)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{7}{6}$

a) $x=0$ **b)** $x=2$ **c)** $x=-49, x=1$ **d)** $x=-3, x=2$

2. Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea –4 y el producto de las mismas sea –221.

Respuesta abierta, por ejemplo: $x^2+4x-221=0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior a dos.

a) $6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=0$ **b)** $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3x^2}{4}=-\dfrac{11}{4}$

a) $x(x+1)^2(2x-1)(3x+1)=0\Rightarrow x=0, x=-1, x=\dfrac{1}{2}, x=-\dfrac{1}{3}$

b) $4-3x^4=-11x^2\Rightarrow 3x^4-11x^2-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$

4. Halla la solución de las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5$ **b)** $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7$

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5\Rightarrow x+\sqrt{4x+40}=25\Rightarrow x^2-54x+585=0\Rightarrow x=39$ (no válida) $x=15$ (válida).

b) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7\Rightarrow\sqrt{x+1}=7-\sqrt{2x}\Rightarrow x+1=49+2x-14\sqrt{2x}\Rightarrow 14\sqrt{2x}=x+48\Rightarrow$

$\Rightarrow 392x=x^2+2304+96x\Rightarrow x^2-296x+2304=0\Rightarrow x=8$ (válida) $x=288$ (no válida).

5. Resuelve las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

a) $6^{-2x^2+x+8}=36$ **b)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\dfrac{11}{4}$ **c)** $\log(100x)+2\log x=-1$ **d)** $2\log x-\dfrac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4$

a) $6^{-2x^2+x+8}=36\Rightarrow -2x^2+x+8=2\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow x=2, x=-\dfrac{3}{2}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\dfrac{11}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{2^x}{2}+2^x=\dfrac{11}{4}$. Haciendo el cambio: $z=2^x$, $x=\log_2\left(\dfrac{4}{3}\right)$ y $x=-1$.

c) $\log(100x)+2\log x=-1\Rightarrow\log\left(100x^3\right)=\log\left(\dfrac{1}{10}\right)\Rightarrow 1000x^3=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{10}$

d) $2\log x-\dfrac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4\Rightarrow\log\left(\dfrac{x^2x^2}{\left(x^5\right)^{\frac{2}{5}}}\right)=\log 10000\Rightarrow\dfrac{x^4}{x^2}=10000\Rightarrow x=100$

6. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 5x-3y=4 \\ -2x-7y=-\dfrac{13}{3} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x-5y=10 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{5y}{6}=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $x=1,\ y=\frac{1}{3}$ **b)** $x=-5-5t, y=2t$

7. Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y-z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x-2y+z=1 \\ 4x-y+2z=-1 \end{cases}$

a) Sistema compatible indeterminado. Soluciones de la forma: $x=t, y=2-t, z=1$.

b) No tiene solución

8. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado.

a) $\begin{cases} 2x^2+y^2=18 \\ -2x^2+3y^2=46 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x^2+y^2=18 \\ -2x^2+3y^2=46 \end{cases} \Rightarrow 4y^2=64 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \quad x^2=1 \Rightarrow x=1, y=4; x=-1, y=4 \\ y=-4 \quad x^2=1 \Rightarrow x=1, y=-4; x=-1, y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5-x}{2} \\ x^2+3xy=-8 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x\dfrac{5-x}{2}=-8 \Rightarrow 2x^2+15x-3x^2+16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=16, y=-\dfrac{11}{2}; x=-1, y=3$

9. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x+3^y=\dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1}+3^{y-1}=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 2+\log y-\log x=\log 250 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x+3^y=\dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1}+3^{y-1}=4 \end{cases} \quad 2^x=A, 3^y=B \Rightarrow \begin{cases} A+B=\dfrac{19}{2} \\ 2A+\dfrac{B}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{5}{3}B=-15 \Rightarrow B=9 \quad A=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-1, y=2$

b) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 2+\log y-\log x=\log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=10 \\ \dfrac{100y}{x}=250 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{10}{x}=\dfrac{250x}{100} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2, y=5$; $x=-2$ (no válida)

10. Calcula tres números pares consecutivos tales que la suma del primero más la media aritmética de los otros dos valga 271.

Sean los números pares consecutivos $2x$, $2x+2$, $2x+4$. $2x+\dfrac{(2x+2)+(2x+4)}{2}=271 \Rightarrow x=67$.

Los tres números pares son 134, 136 y 138.

Relaciona y contesta

Elige una única respuesta correcta en cada caso

1. El número de soluciones de la ecuación $x^3 + \frac{2}{x} = -3x$ es:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Solución: D.

2. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{-x+2} - 2 = 2x$ son:

A. $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -2$ **B.** $x = -\frac{1}{4}$ **C.** $x = -2$ **D.** La ecuación no tiene solución.

Solución: B

3. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

A. Tiene seguro una solución.
B. Tiene seguro dos soluciones.
C. Seguro que no tiene solución.
D. Ninguna de las anteriores.

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Una ecuación polinómica con el término independiente nulo:

A. Tiene por lo menos una solución real.
B. El número de soluciones reales coincide con su grado.
C. El número de soluciones reales coincide con su grado menos 1.
D. Una de sus soluciones es $x= 0$.

Solución: A y D

5. Se considera el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

A. Si se añade la ecuación $2x+ 2y+ 2z= 6$, el sistema tiene infinitas soluciones.
B. Si se añade la ecuación $z=-4$, el sistema no tiene solución.
C. Si se añade la ecuación $2x+y+z = 4$ el sistema tiene como única solución $x= 1$ $y= 1$ $z= 1$.
D. Si se añade la ecuación $-x - z =-2$, el sistema tiene infinitas soluciones entre las que se encuentra la x=1, y=1, z=1.

Solución A, B y C

6. Se considera que un número *x* verifica las expresiones:

1. $A(x) = B(x)$ **2.** $[A(x)]^2 = [B(x)]^2$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes

Solución: B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere saber si existe equilibrio de mercado de un cierto producto. Para ello se aportan, referidas al producto:

1. La función demanda **2. La función oferta**

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Pueden eliminarse los dos datos.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: D

5 Inecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Ordena de menor a mayor los siguientes números.

a) $\frac{11}{4}$, $\frac{68}{25}$, $\frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $0,1\widehat{2}$, $\frac{11}{90}$, $\frac{3}{25}$ y 0,12

a) $\frac{11}{4}=\frac{275}{100}$ $\quad \frac{68}{25}=\frac{272}{100}$ $\quad \frac{14}{5}=\frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10}=\frac{270}{100} \Rightarrow \frac{27}{10}<\frac{68}{25}<\frac{11}{4}<\frac{14}{5}$

b) $0,1\widehat{2}=\frac{11}{90}=\frac{55}{450}$ $\quad 0,12=\frac{3}{25}=\frac{54}{450} \Rightarrow 0,12=\frac{3}{25}<\frac{11}{90}=0,1\widehat{2}$

5. Comprueba en cada caso si el valor indicado forma parte de la solución de la inecuación.

a) $x=-2$ de la inecuación $x^3+x^2+x\le 6$

b) $x=-\frac{1}{2}$ de la inecuación $2(x-2)+\frac{x-1}{3}>x-1$

a) $(-2)^3+(-2)^2+(-2)=-8+4-2=-6\le 6 \Rightarrow$ Sí pertenece a la solución.

b) $$\left.\begin{array}{l} 2\left(-\frac{1}{2}-2\right)+\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{3}=-5-\frac{1}{2}=-\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{11}{2}<-\frac{3}{2} \Rightarrow \text{ No pertenece a la solución.}$$

6. Resuelve las inecuaciones lineales siguientes.

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le -2(x-5)-\frac{222}{7}$

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2} \Rightarrow 4x-12-x+2\le 4x \Rightarrow -x\le 10 \Rightarrow x\ge -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10, +\infty)$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6} \Rightarrow 12x-18-3x>6x+3x+1 \Rightarrow 0x>19 \Rightarrow$ Solución: $\varnothing$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2} \Rightarrow 2x+4x+4+6x+12<x+38 \Rightarrow 11x<22 \Rightarrow x<2 \Rightarrow$ Solución: $(-\infty, 2)$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le -2(x-5)-\frac{222}{7} \Rightarrow 14(-10x-3)-3(2x-5)+7x\le -14(x-5)-222 \Rightarrow$

$\Rightarrow -140x-42-6x+15+7x\le -14x+70-222 \Rightarrow -125x\le -125 \Rightarrow 125x\ge 125 \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow$ Solución: $[1, +\infty)$

7. Ejercicio resuelto.

8. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 2 \geq 0$ **c)** $-x^2 - 1 > 0$ **e)** $\frac{2}{3}x^2 + 4x < 2x$

b) $4 - x^2 < 0$ **d)** $3x^2 - x \geq x^2 - 5x$ **f)** $-x^2 - 2x - 1 > 0$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $(2 - x)(2 + x) < 0 \Rightarrow -(x - 2)(x + 2) < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) $x \in \varnothing$

d) $2x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow 2x(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

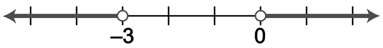
e) $2x^2 + 12x - 6x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x < 0 \Rightarrow 2x(x + 3) < 0 \Rightarrow x \in (-3, 0)$

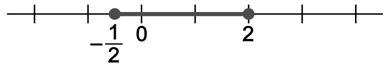
f) $-(x + 1)^2 > 0 \Rightarrow (x + 1)^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

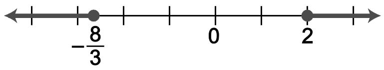
9. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $3x(1 + x) - 2(x^2 - 1) > 2$ **b)** $x^2 - \frac{3}{2}x \leq 1$ **c)** $\frac{x^2}{2} + \frac{x+1}{3} \geq 3$

a) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ **b)** $\left[\frac{-1}{2}, 2\right]$ **c)** $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] \cup [2, +\infty)$



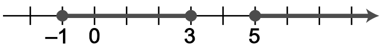


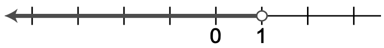


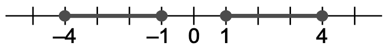
10. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa las soluciones.

a) $x^3 - 6x^2 + 7x + 15 \geq x^2$ **b)** $x^3 - 3x^2 < 1 - 3x$ **c)** $x^4 - 17x^2 \leq -16$

a) $[-1, 3] \cup [5, +\infty)$ **b)** $(-\infty, 1)$ **c)** $[-4, -1] \cup [1, 4]$



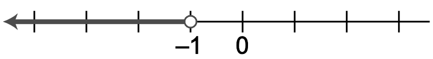




11. Representa en la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

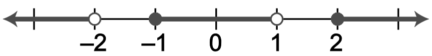
a) $\frac{4x-5}{4x^2 - x - 5} < 0$ **b)** $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \geq 0$ **c)** $1 > \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) $\frac{4x-5}{4x^2 - x - 5} < 0 \Rightarrow \frac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$



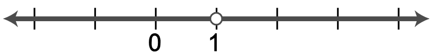
b) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

$(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$



	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 1$	–	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$	+	–	+	–	+

c) $1 > \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 > 2x \Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$



12. Ejercicio interactivo.

13 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\le 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\ge 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-1<2x-(1+x) \\ 3(x+2)\ge 2(x-4) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x\le 6 \\ 3-x>2(x-4) \\ 5x+3>-(x-1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\le 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow [-1,1)$

c) $\begin{cases} 3x-1<x-1 \\ 3x+6\ge 2x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x\ge -14 \end{cases} \Rightarrow [-14,0)$

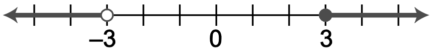
b) $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\ge 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>4 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le 1 \end{cases}$ No tiene solución

d) $\begin{cases} x\le 6 \\ -3x>-11 \\ 6x>-2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{11}{3}\right)$

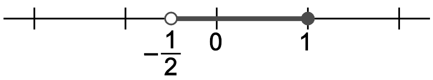
19. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa las soluciones.

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\le 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}>x-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{4}\le 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\le 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\ge 0 \\ (x+3)(x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty) \\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$



b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}>x-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{4}\le 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-2x>4x-1 \\ 2x+2+x-1\le 4 \\ 2x-3x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>-1 \\ 3x\le 3 \\ -x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x\le 1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},1\right]$



20. Ejercicio resuelto.

21. Representa los semiplanos formados por las soluciones de las siguientes inecuaciones.

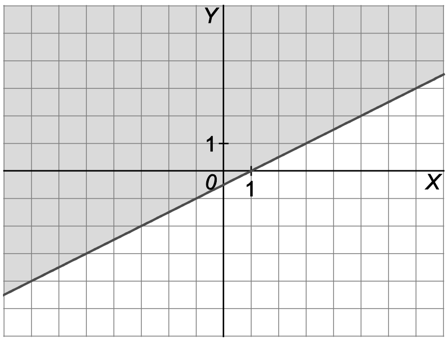
a) $x - 2y < 1$

b) $3x + y \geq 2$

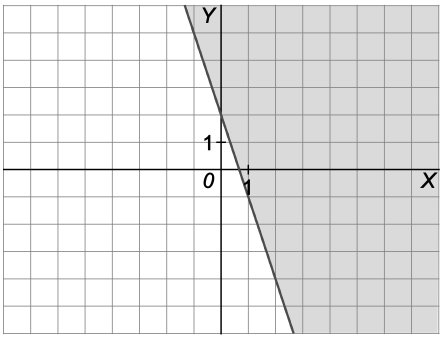
c) $x - 3y \leq 2x + 4 - 3y$

d) $5x + 3y + 10 < 2x + 2$

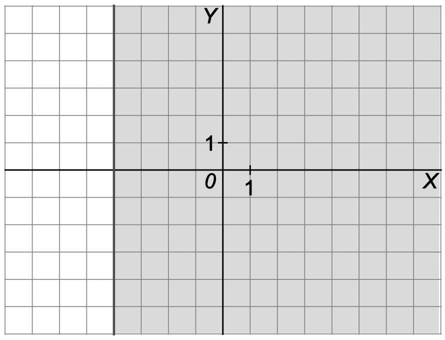
a)



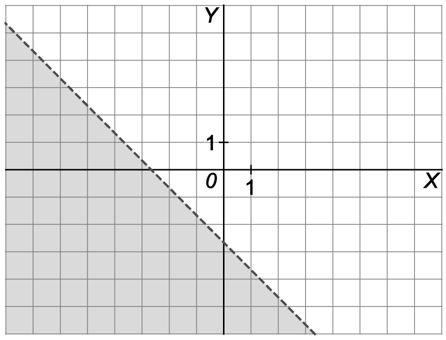
b)



c)

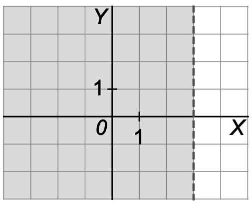


d)

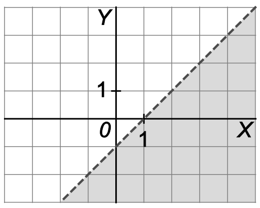


22. Escribe en cada apartado una inecuación de la que sea solución el semiplano representado.

a)



b)



a) Respuesta abierta. $x < 3$

b) Respuesta abierta. $y < x - 1$

23. Expresa mediante un sistema de inecuaciones los siguientes subconjuntos del plano.

a) Puntos pertenecientes al segundo cuadrante.

b) Puntos con ordenada positiva que están por encima de la bisectriz del primer cuadrante.

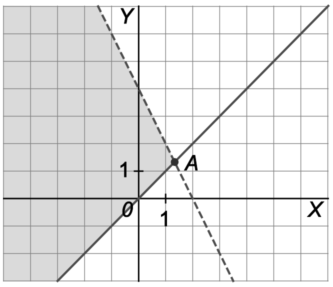
a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

b) Respuesta abierta. $\begin{cases} y > 0 \\ y > x \end{cases}$

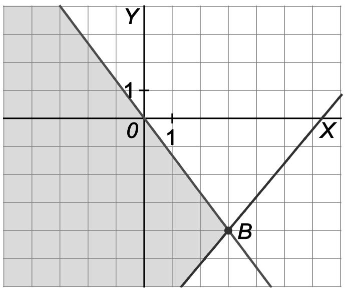
24. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} y < -2x + 4 \\ y \geq x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x - 5y \leq 38 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

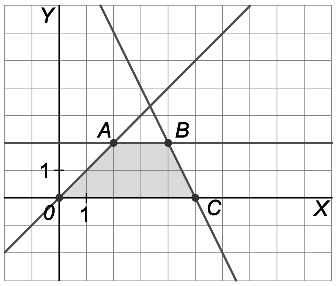
a)



b)



c)



$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

$\begin{cases} 6x - 5y \leq 38 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow B(3, -4)$

$\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2,2);\ \begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4,2)$

$\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(5,0);\ O(0,0)$

25. Ejercicio interactivo.

26. Ejercicio resuelto.

27. En la población de un territorio se han producido, en un período de tiempo determinado, las siguientes variaciones medidas sobre la población inicial:

- **2,5 % de nacimientos**
- **0,5 % de emigrantes**
- **2,25% de defunciones**
- **0,75 % de inmigrantes**

¿Entre qué valores estará la población final si la inicial estaba entre 45000 y 46000 habitantes?

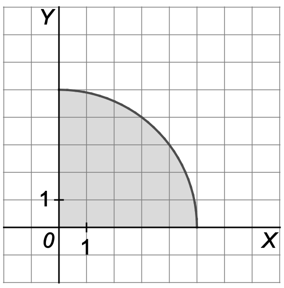
Sea x la población inicial: entonces $45\,000 < x < 46\,000$.

Nos piden entre qué valores estará: $P = x + 0{,}025x - 0{,}0225x - 0{,}005x + 0{,}0075x = 1{,}005x$.

Entonces tendremos que $45\,000 \cdot 1{,}005 < P < 46\,000 \cdot 1{,}005$, es decir, $45\,225 < P < 46\,230$.

28. Determina y representa la región del plano cuyos puntos son interiores a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 5 y que están situados en el primer cuadrante.

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



29. En la fabricación de un hectómetro de cable del tipo *A* se utilizan 16 kg de plástico y 4 kg de cobre, y en la de un hectómetro de cable de tipo *B*, 6 kg de plástico y 12 kg de cobre. Representa gráficamente las posibilidades de producción si se debe fabricar más cable de tipo *A* que de tipo *B* y se cuenta con 252 kg de plástico y 168 kg de cobre.

x hm de cable de tipo *A*, y hm de cable de tipo *B*

Material	Plástico	Cobre
Tipo *A*	16	4
Tipo *B*	6	12

$$\begin{cases} 16x+6y \le 252 \\ 4x+12y \le 168 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+3y \le 126 \\ x+3y \le 42 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

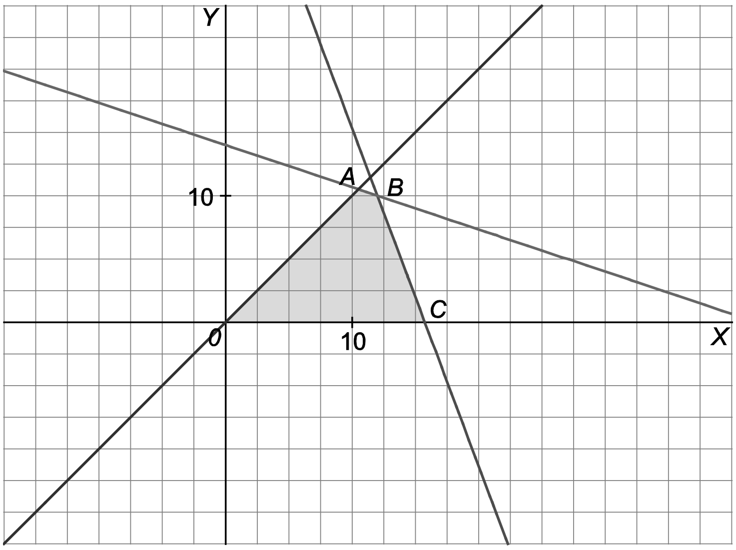
Vértices:

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ x+3y = 42 \end{cases} \Rightarrow A(10{,}5;10{,}5)$$

$$B \equiv \begin{cases} 8x+3y = 126 \\ x+3y = 42 \end{cases} \Rightarrow B(12{,}10)$$

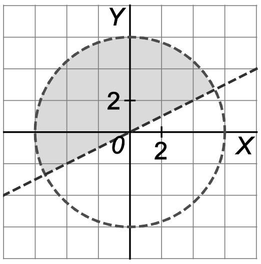
$$C \equiv \begin{cases} 8x+3y = 126 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(15{,}75;\ 0)$$

$O(0{,}0)$



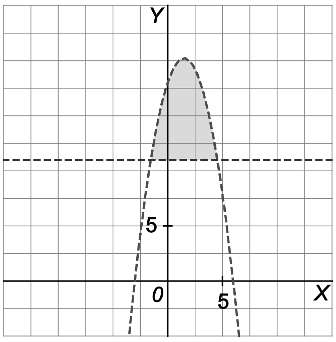
30. Determina y representa los puntos del interior del círculo de centro el origen de coordenadas y radio 6, cuya abscisa es menor que el doble de su ordenada.

$$\begin{cases} x^2+y^2 < 36 \\ x<2y \end{cases}$$



31. Determina las inecuaciones que cumplen los puntos (x,y) del interior de la región delimitada por la parábola $y=-x^2+3x+18$ y la recta $y=11$.

$$\begin{cases} y < -x^2+3x+18 \\ y>11 \end{cases}$$



32 a 39. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Inecuaciones lineales y polinómicas

40. Indica si los números –10, –1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{5}$, 0, $\frac{3}{5}$, 1 y 5 son soluciones de la inecuación $\frac{8}{3}x+2\geq 0$.

Basta sustituir cada número en la expresión y comprobar si se verifica la desigualdad.

No son solución: –10, y –1. Sí lo son el resto.

41. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales, expresa las soluciones en forma de intervalo y represéntalas sobre la recta real.

a) $\frac{8}{3}x+2\geq 0$

b) $2x-\sqrt{2}\leq 0$

c) $-x+1>-\frac{10}{7}$

d) $3(2x-5)-4(x-2)\leq 2-4x$

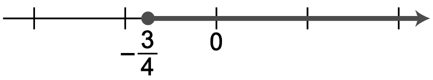
e) $2x-\frac{9x}{4}<\frac{x}{3}$

f) $\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}<x+1$

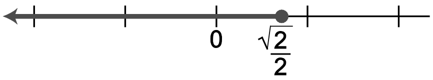
g) $\frac{x}{1-\sqrt{2}}<2$

h) $\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{4}+\frac{x-3}{18}\geq -\frac{8}{9}$

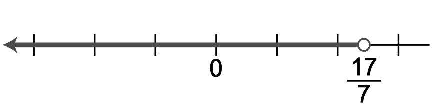
a) $\left[\frac{-3}{4},+\infty\right)$



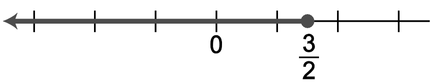
b) $\left(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$



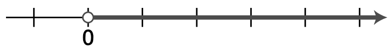
c) $\left(-\infty,\frac{17}{7}\right)$



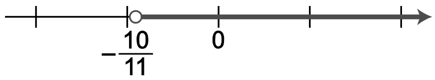
d) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$



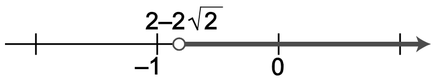
e) $(0,+\infty)$



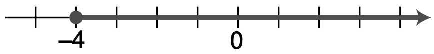
f) $\left(-\frac{10}{11},+\infty\right)$



g) $\left(2-2\sqrt{2},+\infty\right)$



h) $[-4,+\infty)$



42. Resuelve las siguientes inecuaciones con valores absolutos:

a) $|x-3| \leq 5$ **c)** $|2x-8| \leq 10$ **e)** $|x-3| \leq -5$

b) $|x+2| < 4$ **d)** $|3x+9| \leq 2$ **f)** $|x+3| < -5$

a) $[-2, 8]$ **b)** $(-6, 2)$ **c)** $[-1, 9]$ **d)** $\left[-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right]$ **e)** $\varnothing$ **f)** $\varnothing$

43. Halla y representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x - 12 \geq 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \leq 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$

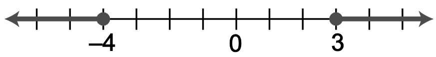
f) $2x^2 + x + 1 < 0$

g) $6 - x^2 \geq 0$

h) $(3x-1)(5x+2) \geq 0$

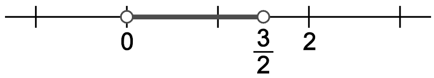
a) $x^2 + x - 12 \geq 0$, entonces $(x+4)(x-3) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$



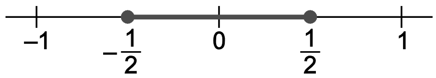
b) $-2x^2 + 3x > 0$, entonces $x(-2x+3) > 0$

Solución: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$



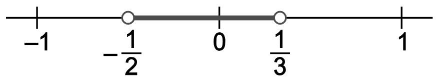
c) $4x^2 - 1 \leq 0$, entonces $x^2 \leq \frac{1}{4}$

Solución: $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



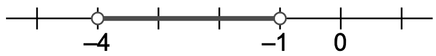
d) $6x^2 + x - 1 < 0$, entonces $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$

Solución: $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$



e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$, entonces $-2(x+4)(x+1) > 0$

Solución: $(-4, -1)$



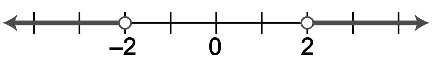
f) $2x^2 + x + 1 < 0$.

Como $2x^2 + x + 1 = 0$, no tiene soluciones reales.

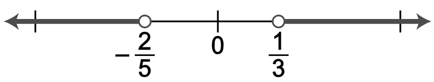
Solución: $\varnothing$

g) $-x^2 < -4$, es decir, $x^2 > 4$.

Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



h) Las soluciones son: $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.



44. Simplifica y resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $(x-2)^2+5\le 2x$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}$

c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2$

a) $(x-2)^2+5\le 2x\Rightarrow x^2-6x+9\le 0\Rightarrow (x-3)^2\le 0\Rightarrow x=3\Rightarrow\{3\}$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}\Rightarrow 6x-12<4x-2x^2\Rightarrow 2x^2+2x-12<0\Rightarrow 2(x-2)(x+3)<0\Rightarrow(-3,2)$

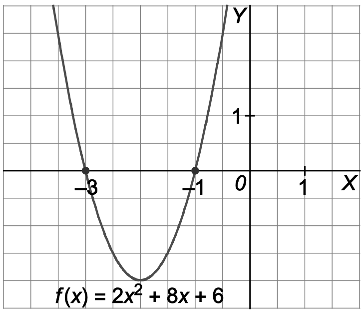
c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}\Rightarrow 10x^2+2\ge 3x^2-1\Rightarrow 7x^2+3\ge 0\Rightarrow\mathbb{R}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}<0\Rightarrow\dfrac{1}{3}(x-2)(3x+1)<0\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{3},2\right)$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1\Rightarrow 2x^2+x-3\ge 0\Rightarrow 2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\ge 0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-3}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2\Rightarrow 5x^2+4x-28>0\Rightarrow 5(x-2)\left(x+\dfrac{14}{5}\right)>0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-14}{5}\right]\cup(2,+\infty)$

45. Resuelve las inecuaciones dadas observando la gráfica de la función polinómica $f(x)=2x^2+8x+6$.



a) $x^2+4x+3\le 0$

b) $-x^2-4x-3>0$

a) $[-3,-1]$

b) $(-3,-1)$

46. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3 - 4x > 0$

b) $x^3 - 3x - 2 < 0$

c) $x^4 - 1 \geq 0$

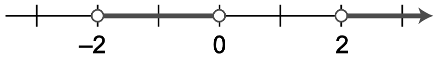
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$

e) $x^4 - 5x^2 \geq 36$

f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$

a) $x^3 - 4x > 0$, entonces $x(x - 2)(x + 2) > 0$

Solución: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

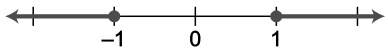


b) $x^3 - 3x - 2 < 0$, entonces $(x - 2)(x + 1)^2 < 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

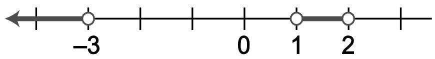
c) $x^4 - 1 \geq 0$, entonces $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



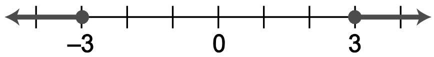
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$, entonces $(x - 2)(x - 1)(x + 3) < 0$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$



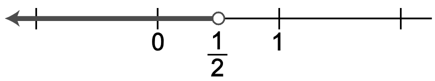
e) $x^4 - 5x^2 \geq 36$, entonces $(x^2 + 4)(x - 3)(x + 3) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$, entonces $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + 1\right) < 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$



47. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x\left(x^2+3x\right)>6x+8$

b) $2x^4-8x^3>2x-8$

c) $x^5-x^4-9x^3>12-16x-5x^2$

d) $x^2\left(x^2+1\right)+2x^3-6x>x\left(x^3-4x+1\right)$

a) $(x-2)(x+1)(x+4)>0$

	$-\infty$ a -4	-4 a -1	-1 a 2	2 a $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+1)(x+4)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución: $(-4,-1)\cup(2,+\infty)$

b) $2(x-4)(x-1)\left(x^2+x+1\right)>0$

	$-\infty$ a 1	1 a 4	4 a $+\infty$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$
$4(x-1)(x-4)(x^2+x+1)$	$+$	$-$	$+$

Solución: $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

c) $(x-3)(x-1)^2(x+2)^2>0$

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-1)^2(x+2)^2$	$-$	$-$	$-$	$+$

Solución: $(3,+\infty)$

d) $x(x-1)(2x+7)>0$

	$-\infty$ a $-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$ a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\left(x+\frac{7}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución: $\left(-\frac{7}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$

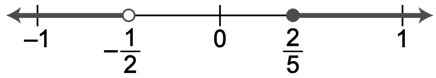
Inecuaciones racionales

48. Expresa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \geq 0$ **b)** $\frac{x^2-1}{x+2} \leq 0$ **c)** $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0$ **d)** $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0$

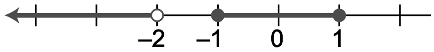
a) $\frac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$



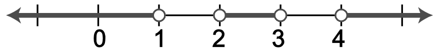
b) $\frac{x^2-1}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \leq 0$

Solución: $(-\infty, -2) \cup [-1, 1]$



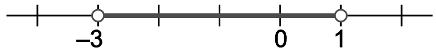
c) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{(x-3)(x-2)} > 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$



d) $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)(x+3)^2} < 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} < 0$

Solución: $(-3, 1)$



49. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \geq -2$ **b)** $\frac{x-1}{x+3} - 1 > 0$ **c)** $\frac{x^2}{x-2} \leq 2$ **d)** $\frac{x^2-3}{x+3} < x$

a) $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup [0, +\infty)$ **b)** $(-\infty, -3)$ **c)** $(-\infty, 2)$ **d)** $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

50. Halla las soluciones de la inecuación

$$\frac{x^2 - kx - 2k^2}{(x+k)(x^2-k^2)} \geq 0$$

siendo *k* un número positivo.

$\frac{(x-2k)(x+k)}{(x+k)^2(x-k)} \geq 0$, de solución $(-k, k) \cup [2k, +\infty)$.

51. Sea *a* un número positivo y diferente de la unidad, demuestra que la suma de *a* con su inverso es superior a 2. Utiliza el desarrollo del cuadrado de la diferencia de un número y su inversa.

Sea *a* cualquier número estrictamente positivo y diferente de la unidad.

El cuadrado de $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ es estrictamente positivo:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = a + \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

Sistema de inecuaciones con una incógnita

52. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3<2x+5 \\ 3>2x+5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3<x<3 \\ x^2>1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3x-3<7 \\ 3x-x\le 6-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,\ 2)$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-x<4 \\ 2x+3x-3>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{3}\right)$

c) $\begin{cases} -8<2x \\ -2>2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x \\ -1>x \end{cases} \Rightarrow (-4,\ -1)$

d) $\begin{cases} x<3 \\ x>-3 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow (-3,-1)\cup(1,\ 3)$

53. Halla la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases}$

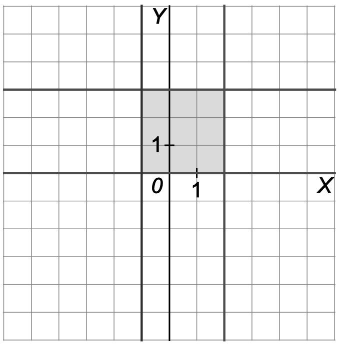
a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9-2x\le -3 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow [-2,\ 1]$

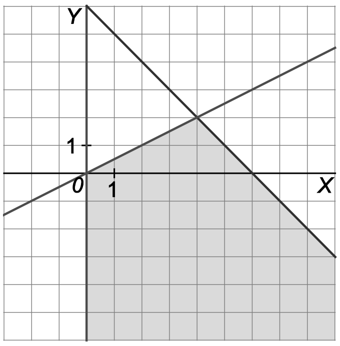
54. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y \le 6 \\ 2y \le x \\ x \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y \le 2 \\ x \ge y-2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 1 \\ x+y < 6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x+4y \ge 12 \\ -3x+4y \le 4 \\ x-4 \le 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x-4 \ge 0 \\ x-6 \le 0 \\ 3 \le y \\ y \le 5 \end{cases}$

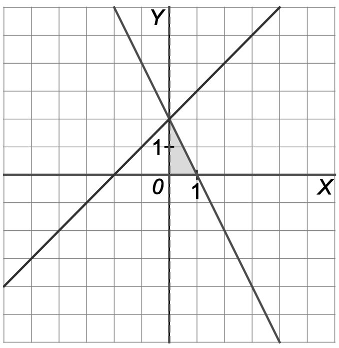
a) Vértices: (–1, 0), (–1, 3), (2, 0) y (2, 3)



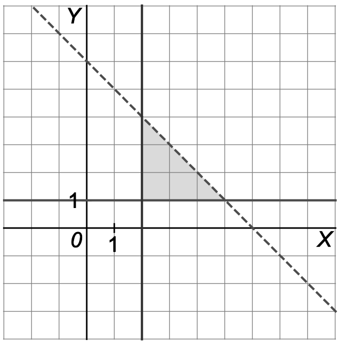
b) Vértices: (0, 0) y (4, 2)



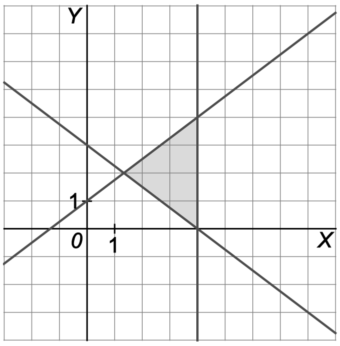
c) Vértices: (0, 0), (1, 0) y (0, 2)



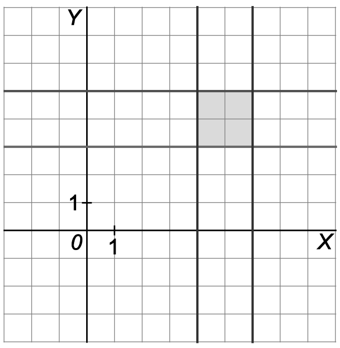
d) Vértices: (2, 1), (5, 1) y (2, 4)



e) Vértices: (4, 0), (4, 4) y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



f) Vértices: (4, 3), (4, 5), (6, 3) y (6, 5)



55. Halla los vértices de la región determinada por:

$$\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x - 2y \ge -3 \\ y > \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \ge 1 \end{cases}$$

$A(4, 0)$, $B(3, 3)$, $C(2, -1)$ y $D(-1, 1)$

56. Escribe, para cada apartado, un sistema de inecuaciones tal que la representación gráfica de su solución sea la indicada.

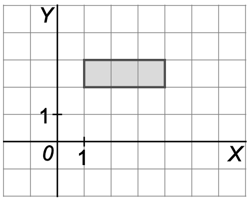
a) El cuarto cuadrante del plano.

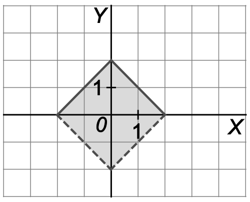
b) Un cuadrado de centro el punto (2, 1) y lado 3.

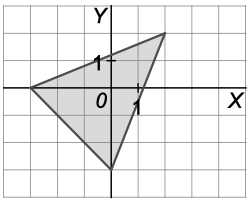
c) Un rectángulo de base 2 y altura 8 centrado en el origen.

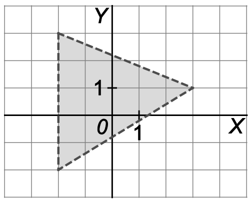
a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta. $\begin{cases} 0{,}5 \le x \le 3{,}5 \\ -0{,}5 \le y \le 2{,}5 \end{cases}$ **c)** Respuesta abierta. $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -4 \le y \le 4 \end{cases}$

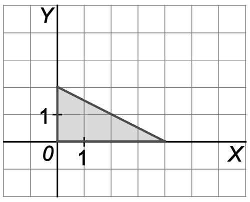
57. Expresa mediante sistemas de inecuaciones las regiones sombreadas en las siguientes figuras.

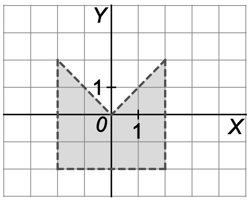
a)


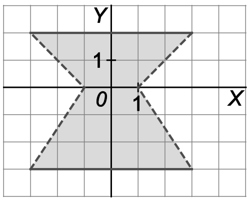
c)


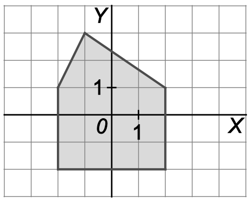
e)


g)


b)


d)


f)


h)


a) $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \le x + 2 \\ y > x - 2 \\ y \le -x + 2 \\ y > -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \le \dfrac{2}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ y \ge -x - 3 \\ y \ge \dfrac{5}{2}x - 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y < \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5} \\ x > -2 \\ y > \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

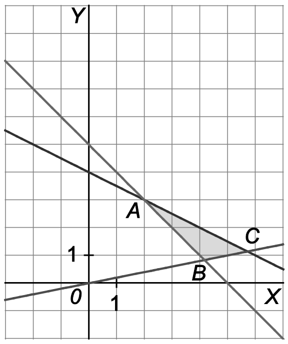
b) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ y > -2 \\ y < -x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 2 \\ y > -2 \\ y < x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y > -x - 1 \\ y > x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \le y < 0 \\ y < \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y < -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ y \ge -2 \\ y \le 2x + 5 \\ y \le \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$

58. Considera el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+2y\le 8 \\ x+y\ge 5 \\ x-5y\le 0 \end{cases}$ y resuélvelo gráficamente. Encuentra todas sus soluciones enteras.



Vértices: $A(2, 3)$, $B\left(\dfrac{25}{6}, \dfrac{5}{6}\right)$, $C\left(\dfrac{40}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$.

Las soluciones enteras son: (4, 2), (4, 1), (5, 1), (3, 2) y (2, 3).

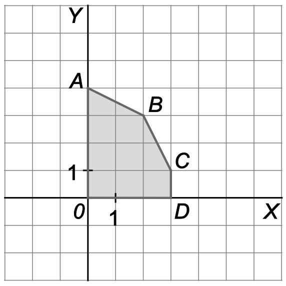
59. Utilizando el desarrollo del cuadrado de una diferencia, demuestra que la media aritmética de dos números reales positivos es superior o igual a su media geométrica.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}\ge 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0 \Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$$

60. La figura muestra la solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} ax+by\le c \\ dx+ey\le f \\ y\ge 0 \\ 0\le x\le g \end{cases}$$

Encuentra valores posibles para *a, b, c, d, e, f* y *g*.



Recta que pasa por $A(0, 4)$ y $B(2, 3)$: $ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} 4b=c \\ 2a+3b=c \end{cases} \Rightarrow 4b=2a+3b \Rightarrow b=2a$

Recta que pasa por $B(2, 3)$ y $C(3, 1)$: $dx+ey=f \Rightarrow \begin{cases} 2d+3e=f \\ 3d+e=f \end{cases} \Rightarrow 2d+3e=3d+e \Rightarrow d=2e$

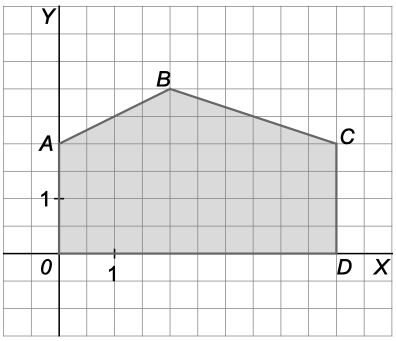
$CD \equiv x=3 \Rightarrow g=3$. Así, si por ejemplo : $a=1$ y $e=1$, entonces $b=2$, $c=8$, $d=2$, , $f=7$ y $g=3$.

61. Escribe todas las posibles soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales siendo los valores de las incógnitas obligatoriamente números enteros.

a) $\begin{cases} x-2y\ge -4 \\ x+3y\le 11 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \quad y\ge 0 \end{cases}$

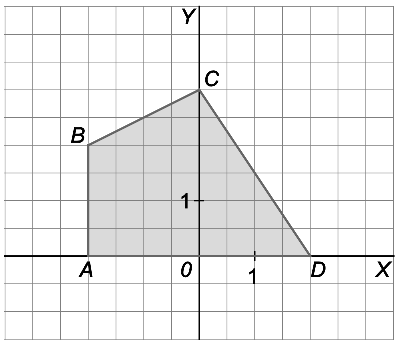
b) $\begin{cases} x-2y\ge -6 \\ 3x+2y\le 6 \\ x+2\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

a)



(0, 0), (1, 0), (2, 0),(3, 0), (4, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), 4, 1), (5, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (2, 3)

b)



(–2, 0), (–1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (–2, 1), (–1, 1), (0, 1), (1, 1), (–2, 2), (–1, 2), (0, 2),(0, 3)

62. Dados dos números reales *a* y *b* tales que *a* < *b*, completa la tabla de signos y resuelve las inecuaciones.

	$-\infty$ a	a b	b $+\infty$
$x-a$			
$x-b$			

a) $4(x-a)(x-b) > 0$ **c)** $(x-a)^2(x-b) < 0$

b) $-2(x-a)(x-b) \le 0$ **d)** $(x-a)^3 \ge 0$

a)

	$-\infty$ a	a b	b $+\infty$
$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$4(x-a)(x-b)$	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

b)

	$-\infty$ a	a b	b $+\infty$
$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$-2(x-a)(x-b)$	$-$	$+$	$-$

$$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

c)

	$-\infty$ a	a b	b $+\infty$
$x-a$	$-$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$
$(x-a)^2(x-b)$	$-$	$-$	$+$

$$(-\infty, b)$$

d)

	$-\infty$ a	a b	b $+\infty$
$x-a$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)^3$	$-$	$+$	$+$

$$[a, +\infty)$$

63. Dados los números reales *a* < *b* < *c* < *d*, completa la siguiente tabla de signos.

	$-\infty$ a	a b	b c	c $+\infty$
$x-a$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-b$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)(x-b)^2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-c$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-b)}{(x-c)^2(x-a)}$	$+$	$-$	$+$	$+$

64. Aplicando las técnicas adecuadas para cada inecuación, resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+x+1 > 0 \\ -2x^2+2x-1 \le 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^3-8x^2+9x+18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^3-3x^2-16x+48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2+2x-12 \le 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-3) \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \{x=0\}$

b) $\begin{cases} x^2-4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4) \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0]$

c) $\begin{cases} x^2+x+1 > 0 \\ -2x^2+2x-1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x^3-3x^2-16x+48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

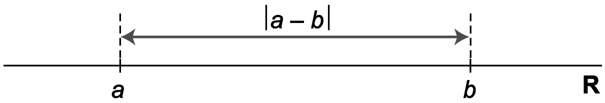
$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+4)(x-4) \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow [-5, -4] \cup \left[3, \dfrac{7}{2}\right)$

e) $\begin{cases} x^3-8x^2+9x+18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3)(x-6) \ge 0 \\ \dfrac{x-5}{x-3} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2+2x-12 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x(x^2+1)} > 0 \\ 2(x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} > 0 \\ (x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2]$

65. La distancia en la recta real entre los puntos que representan a los números *a* y *b* se puede calcular mediante la expresión $d(a, b) = |a - b|$.



a) Calcula la distancia entre los números reales –2 y –6.

b) Calcula el conjunto de números reales *x* cuya distancia al punto 2 es menor o igual a 4.

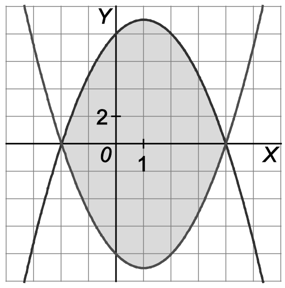
c) Calcula el conjunto de números reales *x* que verifican que su distancia al punto –2 es mayor o igual a 4.

a) $d(-2,-6) = |-2-(-6)| = |-2+6| = 4$

c) $d(x,-2) = |x-(-2)| = |x+2| \geq 4 \Rightarrow x \leq -6$ o $x \geq 2 \Rightarrow (-\infty,-6] \cup [2,+\infty)$

b) $d(x,2) = |x-2| \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 6 \Rightarrow [-2,6]$

66. Escribe un sistema de inecuaciones que caracterice la región encerrada por las parábolas de la figura.



Nota: para hallar la ecuación de la parábola puedes usar la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 2x + 8 \\ y \geq x^2 - 2x - 8 \end{cases}$$

67. Calcula el conjunto de números reales tales que: $|x - 2| \leq |x - 6|$. Para ello:

a) Halla el punto que equidista de 2 y de 6.

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto $x = 4$ equidista de 2 y de 6.

b) La inecuación expresa el conjunto de números reales que están más cerca de 2 que de 6. Por tanto, serán los más pequeños que 4: $(-\infty, 4]$.

Cuestiones

68. Realiza las siguientes acciones referidas a inecuaciones.

a) Escribe una inecuación de primer grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe una inecuación de primer grado que no tenga solución.

c) Escribe una inecuación de segundo grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe una inecuación de segundo grado que no tenga solución.

a) $x + 1 > x$ **b)** $x + 1 < x$ **c)** $x^2 + 1 > 0$ **d)** $x^2 + 1 < 0$

69. Efectúa las siguientes operaciones referidas a sistemas de inecuaciones.

a) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita que no tenga solución.

c) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita que no tenga solución.

e) Escribe un sistema de dos inecuaciones con una incógnita cuyo conjunto solución esté formado únicamente por el punto $x = 0$.

a) $\begin{cases} x+1 > x \\ x+2 > x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+1 < x \\ x+2 > x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 > 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 \leq 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

PROBLEMAS

70. Averigua qué números naturales verifican que al sumarles los dos siguientes se obtiene un número superior a 75.

$x + x + 1 + x + 2 > 75$, entonces $3x + 3 > 75$, luego $x > 24$.

Todos los números naturales superiores a 24 verifican la propiedad.

71. ¿Entre qué medidas se debe aumentar el lado de un cuadrado que tiene por área 36 cm^2 si se quiere que la nueva superficie esté comprendida entre cuatro y nueve veces la inicial?

El lado del cuadrado inicial mide: $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

Sea x la medida que se añade al lado del cuadrado, entonces:

$$4 \cdot 36 \le (6+x)^2 \le 9 \cdot 36 \Rightarrow 144 \le (6+x)^2 \le 324 \Rightarrow 12 \le 6 + x \le 18 \Rightarrow 6 \le x \le 12$$

Debe añadirse entre 6 cm y 12 cm.

72. Se consideran los rectángulos cuya base mide el doble que la altura. ¿Cuáles verifican que su área está comprendida entre 8 cm^2 y 72 cm^2?

Supongamos que las medidas son $2x$ de base y x de altura.

El área será:

$$S = 2xx = 2x^2 \Rightarrow 8 < 2x^2 < 72 \Rightarrow 4 < x^2 < 36 \Rightarrow 2 < x < 6$$

La medida de la altura ha de ser un número comprendido entre 2 cm y 6 cm.

73. Se quiere construir una plaza circular cuya superficie debe estar comprendida entre 5000 y 6000 m^2. ¿Entre qué dos valores se encuentra el radio de la plaza? ¿Y su perímetro?

Sea x el radio de la plaza. Debe ocurrir que:

$$5000 < \pi x^2 < 6000 \Rightarrow 1591{,}55 < x^2 < 1909{,}86 \Rightarrow 39{,}89 < x < 43{,}7 \text{ m.}$$

Por tanto, su perímetro estará entre $250{,}51 < 2\pi x < 274{,}58$ m.

74. Un montañero puede caminar a una velocidad comprendida entre 4 km/h y 6 km/h dependiendo de la mayor o menor dificultad del terreno. Averigua entre qué valores oscila el tiempo que tardará en recorrer una senda de 25 km.

$$4 \le v \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{e}{t} \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{25}{t} \le 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \le \dfrac{25}{t} \Rightarrow t \le \dfrac{25}{4} = 6{,}25 = 6\text{ h } 15\text{ min} \\ \dfrac{25}{t} \le 6 \Rightarrow t \ge \dfrac{25}{6} = 4\text{ h } 10\text{ min} \end{cases}$$

Deberá caminar entre 4 h 10 min y 6 h 15 min.

75. Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho y está dividido en cuatro parcelas con las siguientes características:

- **Sus dimensiones son números enteros.**
- **La parcela más grande tiene un área de 450 m^2.**
- **La parcela más pequeña tiene un área comprendida entre 30 m^2 y 40 m^2.**
- **Las otras dos parcelas tienen la misma superficie.**

¿Cuál es el área total del terreno?

Sea *x* el área de la parcela más pequeña e *y* el área de una de las parcelas medianas. Tenemos que:

$\begin{cases} 30 < x < 40 \\ x < y < 450 \end{cases}$ y que $450 + 2y + x$ es el doble de un cuadrado perfecto $2k^2$, por lo que *x* debe ser par, $x = 2x'$, y queda $225 + y + x' = k^2$, con $\begin{cases} 15 < x' < 20 \\ 2x' < y < 450 \end{cases}$

Entonces, $225 + 30 + 15 < k^2 < 225 + 450 + 20 \Rightarrow 270 < k^2 < 695 \Rightarrow 17 \leq k \leq 26$.

Por tanto, el área total $2k^2$ puede ser 578, 648, 722, 800, 882, 968, 1058, 1152, 1250, o 1352 m^2.

76. En un territorio, el crecimiento de la población se ajusta a un modelo exponencial:

$$P_f = P_i\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

a) Si actualmente la población es de 25 000 personas, ¿cuál debe ser la tasa mínima de crecimiento para que en 5 años pase a ser de 30 000 personas?

b) Considerando la tasa de crecimiento del apartado anterior, ¿qué población habrá en el territorio pasados 50 años?

a) $P_i = 25\,000$ y queremos que ocurra que P_f sea al menos 30 000. Entonces:

$$30\,000 \leq 25\,000\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \Rightarrow r = 3{,}71$$

b) $P_f = 25\,000\left(1 + \frac{3{,}71}{100}\right)^{50} \simeq 154\,515{,}4$. Habrá una población de 154 515 personas.

77. Al comprar 8 bolígrafos se pagó con un billete de 5 €, pero no se recuerda a cuánto ascendía la vuelta. Otro cliente fue a comprar 12 bolígrafos de la misma clase, pero tuvo que volver a casa, ya que los 6,50 € que llevaba para pagar no eran suficientes. ¿Qué se puede decir del precio de un bolígrafo?

Sea *x* el precio de cada bolígrafo en céntimos de euro. Entonces: $\begin{cases} 8x < 500 \\ 12x > 650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 62{,}5 \\ x > 54{,}1\widehat{6} \end{cases}$

Por tanto, el precio de cada bolígrafo está entre 0,55 € y 0,62 €.

78. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos posibles modelos de contrato.

- **El modelo *A* consiste en pagar una cantidad fija de 50 € además de 0,08 € por cada kilómetro recorrido.**
- **El modelo *B* consiste en pagar 80 € sin limitación de kilometraje.**

¿A partir de cuántos kilómetros interesa el alquiler según el modelo *B*?

Sea *x* el número de km a recorrer

$50 + 0{,}08x > 80 \Rightarrow x > \frac{30}{0{,}08} = 375$. Interesa el alquiler según el modelo *B* a partir de 375 km.

79. Una empresa precisa repartidores de *pizzas* y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- **Se cobrará una cantidad mensual fija de 350 € más 3 € por cada *pizza* repartida.**
- **Sueldo fijo de 600 €, independiente del número de *pizzas* repartidas.**

Calcula el número mínimo de *pizzas* que se han de repartir para que convenga escoger la primera opción.

Sea x el número de pizzas. Entonces:

$$350 + 3x \geq 600 \Rightarrow x \geq 83,3$$

Por tanto, conviene elegir la primera opción a partir de 84 *pizzas*.

80. El nivel de alcohol, *N*, en sangre de una persona que ha bebido tres cuartos de litro de cerveza en función de su peso, *x*, en kilogramos, pasada media hora, es:

$$N = \frac{400}{7x}$$

Aunque nunca se debe conducir tras haber ingerido alcohol, la ley de tráfico establece fuertes multas para aquellas personas que conduzcan con un nivel superior a 0,3 g/L. Indica qué personas no podrían conducir a los 30 minutos de haber bebido tres cuartos de litro de cerveza.

$N = \frac{400}{7x} > 0,3 \Rightarrow 400 > 2,1x \Rightarrow x < \frac{400}{2,1} = 190,48$. Las que no superen los 190,48 kg de peso. (Ninguna)

81. Un alimento tiene las siguientes características en su composición:

- **Tiene el triple de masa de grasa que de hidratos de carbono.**
- **La masa de las proteínas es 16 veces la masa de los hidratos de carbono.**
- **En 100 g del alimento hay entre 20 g y 30 g de hidratos de carbono, proteínas y grasas en total.**

a) Determina las diferentes posibilidades de la composición de 100 g de ese alimento.

b) ¿Puede ocurrir que haya 0,5 g de hidratos de carbono, 8 g de proteínas y 1,5 g de grasas?

c) ¿Puede ocurrir que haya 1,25 g de hidratos de carbono, 20 g de proteínas y 3,75 g de grasas?

a) En 100 gramos de alimento: x g de hidratos de carbono, $3x$ g de grasa y $16x$ g de proteínas.

Por tanto: $20 \leq x + 3x + 16x \leq 30 \Rightarrow 20 \leq 20x \leq 30 \Rightarrow 1 \leq x \leq 1,5$

Entre 1 y 1,5 g de hidratos de carbono, entre 3 y 4,5 g de grasa y entre 16 y 24 g de proteínas.

b) No es posible, ya que no se verifican todas las condiciones.

c) Sí es posible.

82. Se quieren confeccionar camisetas deportivas de dos calidades, que se diferencian en la proporción de algodón y de fibra sintética que se utiliza.

La tabla siguiente da la composición de cada tipo de camiseta:

	Unidades de algodón	Unidades de fibra sintética
Calidad extra	4	1
Calidad media	2	3

Para confeccionar todas las camisetas se dispone de un total de 260 unidades de algodón y de 190 unidades de fibra sintética.

a) Determina, de forma gráfica, las diferentes posibilidades que hay de producir las camisetas.

b) ¿Es posible confeccionar 50 camisetas de calidad extra y 40 de calidad media?

a) Sean:

x número de camisetas de calidad extra

y el número de camisetas de calidad media

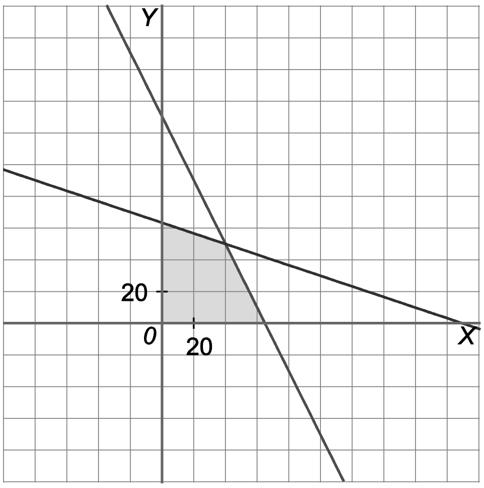
$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 260 \\ x + 3y \leq 190 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices:

A (0; 63,3)

B(40, 50)

C (65, 0)



b) No es posible por falta de algodón.

83. La función de demanda, f_d, correspondiente al mercado de alquiler de ciertas herramientas de bricolaje es para un precio, p, comprendido entre 15 € y 19 €:

$$f_d = -\frac{3}{10}p^2 - \frac{119}{10}p + 123$$

¿Para qué precios la demanda es inferior a 6 unidades?

$f_d < 6 \Rightarrow -3p^2 - 119p + 1170 < 0 \Rightarrow (-\infty, -47{,}82) \cup (8{,}16, +\infty)$

Como p está comprendido entre 15 € y 19 €, entonces para $15 \leq p \leq 19$ la demanda es inferior a 6 unidades.

84. El tratamiento de una enfermedad requiere la administración de dos sustancias curativas, *C* y *D*. Cada semana es preciso consumir por lo menos 30 mg de *C* y 42 mg de *D*. Estas sustancias están incluidas en dos tipos de comprimidos diferentes, *G* y *P*, de la forma siguiente:

- **En un comprimido *G* hay 3 mg de *C* y 5 mg de *D*.**
- **En un comprimido *P* hay 1 mg de *C* y 1 de *D*.**

a) Representa gráficamente las posibles formas en que pueden administrarse al paciente las dosis necesarias.

b) Indica si las condiciones se verifican al tomar:

- 1 comprimido *G* cada día de la semana
- 1 comprimido *P* de lunes a viernes
- 2 comprimidos *P* los sábados y domingos

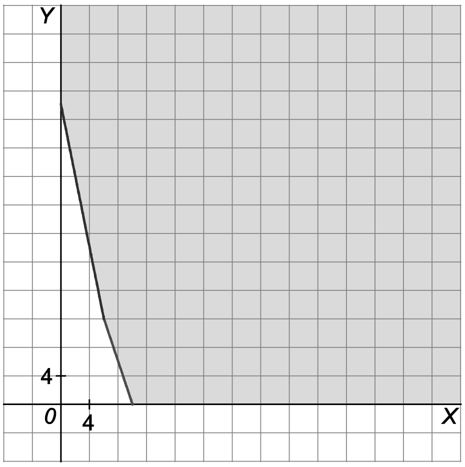
a) Sean:

x el número de comprimidos *G*

y el número de comprimidos *P*

$$\begin{cases} 3x + y \geq 30 \\ 5x + y \geq 42 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 42)$, $B(6, 12)$ y $C(10, 0)$



b) 7 comprimidos *G* y 9 *P* sí las verifican.

85. En unos almacenes de ropa deportiva cuentan con 200 balones y 300 camisetas. Tras un estudio de mercado ponen las existencias a la venta en dos tipos de lotes. El primer lote lleva un balón y tres camisetas y el segundo dos balones y dos camisetas.

El número total de lotes no debe superar los 110 y, en particular, el número máximo de lotes del primer tipo no debe superar los 60.

a) Representa las posibles formas de elaborar los lotes.

b) Indica si cada una de las siguientes posibilidades verifica las condiciones:

- 40 del primer tipo y 80 del segundo.
- 40 del primer tipo y 70 del segundo.
- 70 del primer tipo y ninguno del segundo.

a) Sean

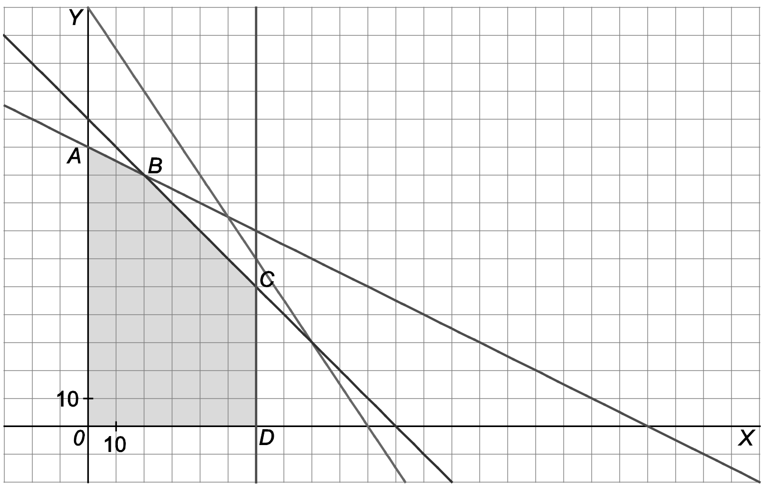
x el número de lotes tipo 1

y el número *de* lotes tipo 2.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 200 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x + y \leq 110 \\ 60 \geq x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 100)$, $B(20, 90)$

$C(60, 50)$ y $D(60, 0)$



b) No, sí y no, respectivamente.

ENTORNO MATEMÁTICO

Montamos una tienda de bicis…

Ángela es dentista, Juan es cocinero e Ignacio es abogado. Los tres hermanos tienen una afición común: la práctica del ciclismo amateur. Todos los fines de semana salen a dar una vuelta en bicicleta por caminos forestales.

En una de las ocasiones, decidieron hacer una competición: debían subir a la cima de un monte con una altura de 1400 m sobre el nivel del mar partiendo de su falda que se encuentra a 1050 m sobre el nivel del mar. El que llegara el último, debería comprar 30 € de lotería para el próximo sorteo.

Por supuesto, y como siempre, en un alarde de buena forma física… Juan llegó el último y compró la lotería y contra todo pronóstico… ¡ganaron el premio gordo!

Decidieron invertir el dinero ganado en montar una empresa de distribución y venta de bicicletas de montaña.

Después de realizar un estudio de mercado, estiman que las funciones de oferta y demanda de un cierto tipo de bicicletas son, para precios comprendidos entre $p = 200$ € y $p = 250$ €:

$$f_o = -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} \qquad f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3}$$

donde f_o y f_d representa el número de unidades ofertadas y demandadas para el precio p.

a) Calcula para qué valores de p la oferta supera a la demanda y para qué valores la demanda supera a la oferta. Interpreta los resultados.

b) Halla para qué valores de p la oferta es superior a 35 unidades.

c) Halla para qué valores de p la demanda es inferior a 30 unidades.

a) $f_o > f_d \Rightarrow -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} \Rightarrow \frac{3}{200}p^2 - \frac{109}{20}p + 460 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3p^2 - 1090p + 92000 > 0 \Rightarrow (p-230)(3p-400) > 0 \Rightarrow p \in \left(-\infty, \frac{400}{3}\right) \cup (230, +\infty)$

Como el dominio de interés de los precios es [200, 250], la oferta superará a la demanda cuando el precio sea superiores a 230 € e inferior o igual a 250 €. Por el contrario, la demanda superará a la oferta cuando el precio sea superior o igual a 200 € e inferior a 230 €.

El punto de equilibrio del mercado se obtiene con un precio de 230 €.

b) $-\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > 35 \Rightarrow p \in (217,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 217 y 250 euros, la oferta es superior a 35 unidades.

c) $f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} < 30 \Rightarrow p \in (239,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 239 € y 250 €, la demanda es inferior a 30 unidades.

… o de accesorios de bicis

Una vez pasada la emoción de haber ganado, empiezan los miedos, y Ángela, Juan e Ignacio ya no están tan seguros de que las bicis sean buena idea. Un local grande, material grande, mucho trabajo,…

Por tanto han pensado, como segunda opción, colocar el premio en crear una empresa que empaquete y distribuya lotes de artículos para el mantenimiento de la bicicleta. Es algo más pequeño e incluso podrían empaquetar a mano y vender por internet.

Los lotes contendrán cámaras para las ruedas, cajas de parches y esprays para reparación de pinchazos.

Deciden elaborar dos tipos de lotes. La tabla siguiente muestra la composición de cada lote.

	Cámaras	Parches	Esprays
LOTE *A*	4	1	1
LOTE *B*	2	2	1

Se cuenta con un máximo de 70 cámaras, 30 cajas de parches y 20 esprays reparadores.

a) Suponiendo que se forman x lotes de tipo *A* e y lotes de tipo *B*, establece, mediante un sistema de inecuaciones con las incógnitas x e y, las condiciones que deben verificar los valores de x e y para que sea factible la elaboración de estos lotes teniendo en cuenta las existencias de cada producto.

b) Mediante GeoGebra dibuja la región de puntos (x,y) que cumplen todas las condiciones anteriores. Establece las coordenadas de todos los vértices de la región.

c) Indica si las siguientes soluciones son o no posibles:

A. $x = 5 \;\; y = 12$ **B.** $x = 5 \;\; y = 13$ **C.** $x = 10 \;\; y = 10$ **D.** $x = 17 \;\; y = 2$

d) Si finalmente se elaboran 15 lotes de *A* y 5 lotes de *B*, ¿se agotarán todas las existencias de los tres productos?

a) Si se forman x lotes de tipo *A* e y lotes de tipo *B*, se deberán cumplir todas y cada una de las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 70 \\ x + 2y \le 30 \\ x + y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

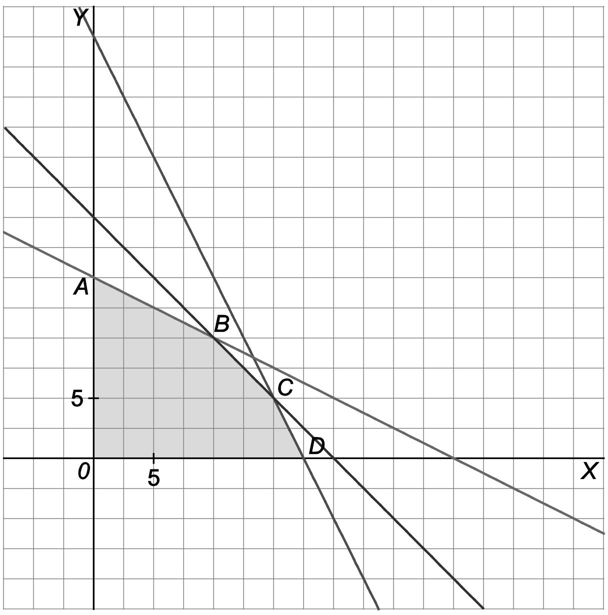
b) Vértices: $O(0,\, 0)$

$$A\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow A(0,15)$$

$$B\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow B(10,10)$$

$$C\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow C(15,5)$$

$$D\begin{cases} y = 0 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow D(17,5;0)$$



c) A. $x = 5 \;\; y = 12$ Si. B. $x = 5 \;\; y = 13$. No. C. $x = 10 \;\; y = 10$ Si. D. $x = 17 \;\; y = 2$ No.

d) Se agotarán las existencias de cámaras y de esprays pero sobrarán 5 cajas de parches.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las inecuaciones lineales.

a) $x-\frac{5}{2}>2+\frac{x+5}{2}$ **b)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{8}\leq\frac{45}{8}$

a) $(14,+\infty)$ **b)** $(-\infty,9]$

2. Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $4x^2+2x-12\leq 0$ **b)** $-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x\geq -1$

a) $2(x+2)(2x-3)\leq 0\Rightarrow\left[-2,\ \frac{3}{2}\right]$ **b)** $(3-x)(2x+1)\geq 0\Rightarrow\left[-\frac{1}{2},\ 3\right]$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-3}{4x-1}\leq -1$ **b)** $\frac{6}{5(x-3)}+\frac{4}{5(x+2)}\geq -1$

a) $\frac{6x-4}{4x-1}\leq 0\Rightarrow\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$ **b)** $\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}\geq 0\Rightarrow(-\infty,-3]\cup(-2,2]\cup(3,+\infty)$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^4-10x^2+9\leq 0$ **b)** $2x^3+x^2-5x\geq -2$

a) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\leq 0\Rightarrow[-3,\ \ -1]\cup[1,\ \ 3]$ **b)** $(x-1)(x+2)(2x-1)\geq 0\Rightarrow\left[-2,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

5. Resuelve el sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\begin{cases} \mathbf{2x-3\leq\frac{x-2}{3}+1} \\ \mathbf{-2x+5\geq 1} \end{cases}$$

$(-\infty,\ 2]$

6. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2-x-6\leq 0 \\ \frac{x-3}{x-2}<0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3<5 \\ \frac{x-1}{x+1}<2 \\ x^2-2x\geq 0 \end{cases}$

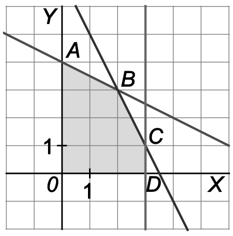
a) $\begin{cases} (x+2)(x-3)\leq 0 \\ \frac{x-3}{x-2}<0 \end{cases}\Rightarrow(2,3)$ **b)** $\begin{cases} x<4 \\ \frac{x+3}{x+1}>0 \\ x(x-2)\geq 0 \end{cases}\Rightarrow(-\infty,-3)\cup(-1,0]\cup[2,4)$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

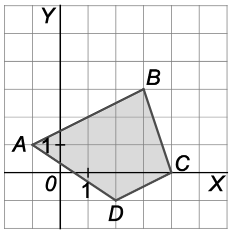
a) $\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ 2x + y \le 7 \\ 0 \le x \le 3 \quad y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x - 2y \ge -3 \\ y \ge \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \ge 1 \end{cases}$

a) $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(2, 3)$, $C(3, 1)$, $D(3, 0)$



b) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$, $D(2, -1)$



8. En una clase hay 15 chicas y 10 chicos. La media aritmética de las calificaciones de las chicas en el último examen de matemáticas ha sido 6,25. ¿Entre qué valores se encuentra la media de los chicos si se sabe que la media de toda la clase es superior a 5,25 e inferior a 6,5?

Sea x la media aritmética de la nota de los chicos en matemáticas. Como la media aritmética de las chicas es 6,25, entonces:

$$25 \cdot 5{,}25 \le 6{,}25 \cdot 15 + 10x \le 25 \cdot 6{,}5 \Rightarrow 131{,}25 \le 93{,}75 + 10x \le 162{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37{,}5 \le 10x \le 68{,}75 \Rightarrow 3{,}75 \le x \le 6{,}875$$

Luego la media de los chicos se encuentra entre 3,75 y 6,875, ambas notas medias incluidas.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las inecuaciones $2x - 1 \le 0$ y $\dfrac{2x-1}{x+1} \le 0$ tienen como conjuntos solución respectivos C_1 y C_2.

A. $C_1 = C_2$ **B.** $C_1 \subset C_2$ **C.** $C_2 \subset C_1$ **D.** $C_1 = C_2 - \{-1\}$

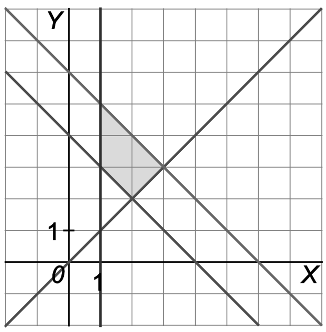
Solución: C

2. La solución de la inecuación $x^2 - (a+b)x + ab < 0$, donde $a < 0 < b$ es:

A. $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ **B.** $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ **C.** (a, b) **D.** $[a, b]$

Solución: C

3. La zona sombreada de $\mathbb{R}^2$ que aparece a la derecha puede ser determinada por el sistema de inecuaciones:



A. $\{x \ge 1, y \ge x, x + y \le 4, x + y \ge 6\}$

B. $\{x \ge 1, y \le x, x + y \ge 4, x + y \le 6\}$

C. $\{x \ge 1, y \ge x, x + y \ge 4, x + y \le 6, y \le 1\}$

D. $\{x \ge 1, y \ge x, x + y \ge 4, x + y \le 6\}$

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si la solución de la inecuación $x^2 + x + c > 0$ con $c \neq 0$ es $(-\infty, c) \cup (b, +\infty)$, entonces:

A. $c = 2$

B. $c = -2$

C. $b = -1$

D. $b = 1$

Solución: B y D

5. Se considera la inecuación $\frac{x-1}{x+2} \geq r$.

A. $x = -3$ forma parte de la solución.

B. $x = -1$ y $x = 1$ forman parte de la solución.

C. $x = -5$ forma parte de la solución pero $x = -2$ no.

D. $x = -2$ forma parte de la solución pero $x = -5$ no.

Solución: A y C

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

6. Se quiere obtener la solución de la inecuación $|x - r| \leq 2$. Se consideran las afirmaciones:

1. ***r*** **es un número estrictamente negativo.**

2. El conjunto solución es el vacío.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

D. Nada de lo anterior.

Solución: D

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere obtener y dibujar la solución de la inecuación $ax + by \leq 0$. Para ello se aportan los siguientes datos:

1. $a = 1$ **y** $b = 2$

2. $b = 2a$

A. Debe eliminarse necesariamente el dato 1.

B. Debe eliminarse necesariamente el dato 2.

C. Pueden eliminarse cualquiera de los dos datos.

D. Hacen falta los dos datos.

Solución: C

6 Funciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

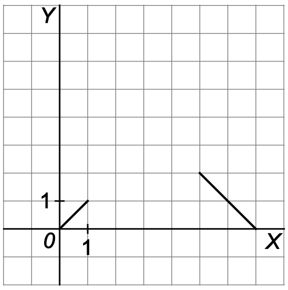
a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{5}$ **b)** $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ **c)** $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}$

a) $D(f)=$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ **c)** $D(h)=[-2,+\infty)$

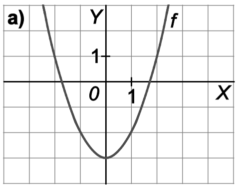
3. Dibuja una posible gráfica para la función *y* = *f*(*x*) con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido:

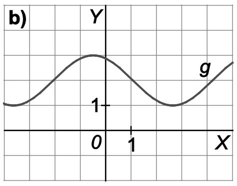
$$\boldsymbol{D(f)=[0,\ 1]\cup[5,\ 7]\ \text{y}\ R(f)=[0,\ 2]}$$

Respuesta abierta. Otra posible solución se muestra en las soluciones al final del libro.



4. Obtén el dominio y el recorrido de estas funciones.





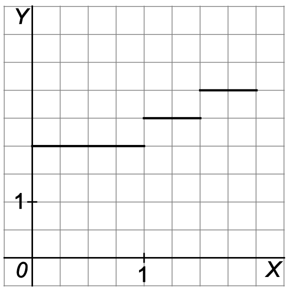
a) $D(f)=\mathbb{R}$; $R(f)=[-3,+\infty)$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}$; $R(g)=[1,\ 3]$

5. Ejercicio resuelto.

6. En un aparcamiento se cobra 50 CENT más por cada media hora de uso a partir de la 1ª hora, además de un fijo de 2€. Encuentra la expresión de la función que da el coste en función del tiempo de aparcamiento y represéntala.

Sea *x* el tiempo de aparcamiento en horas.

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ 2{,}5 & \text{si} \quad 1\le x<1{,}5\\ 3 & \text{si} \quad 1{,}5\le x<2\\ \dots\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ 2+\dfrac{n}{2} & \text{si} \quad \dfrac{n+1}{2}\le x<\dfrac{n+2}{2}\end{cases} \text{ con } n\in\mathbb{N} \text{ y } n\ge 1$$



7. Para las siguientes funciones, calcula $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y determina su dominio.

a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Para $f(-2)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=x$.

Para $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ se usa la segunda expresión $f(x)=x^2$.

Para $f(2)$ se utiliza la tercera expresión $f(x)=x$.

$f(-2)=-2$; $f(-1)=(-1)^2=1$; $f(0)=0^2=0$; $f(1)=1^2=1$; $f(2)=2$; $D(f)=\mathbb{R}$

b) Para $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$.

$f(1)$ no está definido por no pertenecer al dominio.

Para $f(2)$ se utiliza la segunda expresión $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

$$f(-2)=\frac{(-2)^2+2}{(-2)-2}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2};\ f(-1)=\frac{(-1)^2+2}{(-1)-2}=\frac{3}{-3}=-1;\ f(0)=\frac{0^2+2}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$f(2)=\frac{2+1}{2-1}=\frac{3}{1}=3;\ D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$$

8. Expresa $f(x)=|x+5|-x$ como una función a trozos.

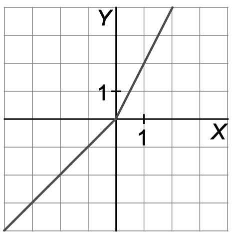
Si $x<-5$, $x+5<0$ por lo que $|x+5|=-(x+5)=-x-5 \Rightarrow |x+5|-x=-x-5-x=-2x-5$

Si $x\ge -5$, $x+5\ge 0$ por lo que $|x+5|=x+5 \Rightarrow |x+5|-x=x+5-x=5$

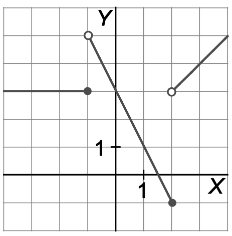
$$f(x)=\begin{cases} -2x-5 & \text{si} \quad x<-5 \\ 5 & \text{si} \quad x\ge -5 \end{cases}$$

9. Encuentra la expresión algebraica de las funciones:

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x<0 \\ 2x & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -2x+3 & \text{si} \quad -1<x\le 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

10. Ejercicio resuelto.

11. Dadas las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-1}{x+3}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g(x)=\frac{2}{x^2-9}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{x-1}}$

Calcula el dominio y la expresión de las siguientes funciones:

a) $f+g$ **b)** $f-h$ **c)** $(f+h)g$ **d)** $\frac{1}{f}$ **e)** $\frac{g}{h}$ **f)** $\frac{h}{f}$

Se calcula previamente el dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$; $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$; $D(h)=[1,+\infty)$

a) $D(f+g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ $\qquad$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-1}{x+3}+\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-4x+5}{x^2-9}$

b) $D(f-h)=[1,+\infty)$ $\qquad$ $(f-h)(x)=f(x)-h(x)=\frac{x-1}{x+3}-\sqrt{x-1}$

c) $D((f+h)g)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\qquad$ $[(f+h)g](x)=[f(x)+h(x)]g(x)=\left(\frac{x-1}{x+3}+\sqrt{x-1}\right)\cdot\frac{2}{x^2-9}$

d) $D\left(\frac{1}{f}\right)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{x+3}{x-1}$

e) $D\left(\frac{g}{h}\right)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\qquad$ $\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{2}{(x^2-9)\sqrt{x-1}}$

f) $D\left(\frac{h}{f}\right)=(1,+\infty)$ $\qquad$ $\left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{(x+3)\sqrt{x-1}}{x-1}$

12. Sean las funciones $\boldsymbol{f(x)=2x^2-3x-5}$ y $\boldsymbol{g(x)=x+h}$, donde $\boldsymbol{h}$ es cualquier número real.

a) Calcula las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$.

b) ¿Para qué valores de *h* tiene la función *g* compuesta con *f* una raíz en $x=0$?

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(x+h)=2(x+h)^2-3(x+h)-5=2x^2+(4h-3)x+(2h^2-3h-5)$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x^2-3x-5)=(2x^2-3x-5)+h=2x^2-3x+(h-5)$

b) $(f\circ g)(0)=2\cdot0^2+(4h-3)\cdot0+(2h^2-3h-5)=2h^2-3h-5=0\Rightarrow h_1=-1,\ h_2=\frac{5}{2}$

13. Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x)=\frac{x-1}{x+2}}$, $\boldsymbol{g(x)=x-4}$, $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{x-3}}$ y $\boldsymbol{k(x)=x^2+1}$ determina el dominio y la expresión de las funciones:

a) $f\circ g$ **b)** $g\circ f$ **c)** $h\circ g$ **d)** $g\circ h$ **e)** $k\circ h$ **f)** $f\circ k$

Dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$; $D(g)=\mathbb{R}$; $D(h)=[3,+\infty)$; $D(k)=\mathbb{R}$

a) $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$ $\qquad$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-4)=\frac{(x-4)-1}{(x-4)+2}=\frac{x-5}{x-2}$

b) $D(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\qquad$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)-4=\frac{-3x-9}{x+2}$

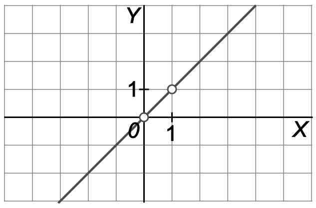
c) $D(h\circ g)=[7,+\infty)$ $\qquad$ $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x-4)=\sqrt{(x-4)-3}=\sqrt{x-7}$

d) $D(g\circ h)=[3,+\infty)$ $\qquad$ $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g\left(\sqrt{x-3}\right)=\sqrt{x-3}-4$

e) $D(g\circ k)=\mathbb{R}$ $\qquad$ $(g\circ k)(x)=g(k(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-4=x^2-3$

f) $D(f\circ k)=\mathbb{R}$ $\qquad$ $(f\circ k)(x)=f(k(x))=f(x^2+1)=\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)+2}=\frac{x^2}{x^2+3}$

14. Dadas las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{x}$, ¿a cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la ilustración?



A. $s = f + g$ **C.** $d = f - g$

B. $p = f \cdot g$ **D.** $q = \frac{f}{g}$

Los dominios de las funciones *s*, *q* y *d*, incluyen el valor $x = 1$.

La función $q(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene dominio $D(q) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y coincide con $y = x$ en el resto de sus puntos.

La respuesta correcta es la D.

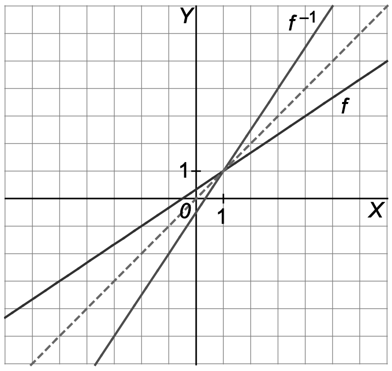
15. Sea $f(x) = \frac{2x+1}{3}$. Halla f^{-1} y dibuja su gráfica y la de *f*.

Se intercambian las variables *x* e *y* en la ecuación explícita de *f*, $y = \frac{2x+1}{3}$, y despejamos *y*:

$x = \frac{2y+1}{3}$

$3x = 2y + 1 \Rightarrow 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$



16. La función $f(x) = x^5 + x + 1$ admite inversa, f^{-1}. Utiliza la calculadora para aproximar $f^{-1}(10)$.

Se busca un valor de *x* para el que $f(x) = x^5 + x + 1 = 10$.

Para ello se dan valores a *x* que hagan que *f*(*x*) se aproxime a 10.

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$f(x) = x^5 + x + 1$	3	7,778	10,094	13,086	35

$f^{-1}(10) \simeq 1{,}5$

17. Obtén la expresión y el dominio de la función inversa de $f(x) = \sqrt{2x-3}$. ¿Cuánto vale $f^{-1}(3)$?

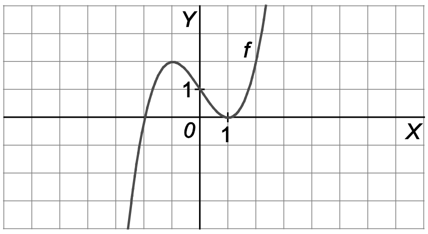
$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2}$. Así pues, $f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$ con $x \geq 0$.

$R(f) = [0, +\infty) \Rightarrow D(f^{-1}) = [0, +\infty)$

$f^{-1}(3) = 6$

18. Ejercicio interactivo.

19. A partir de la gráfica de *f*, esboza las gráficas de las siguientes funciones.



a) $g(x)=f(x)+4y$

b) $g(x)=f(x+4)$

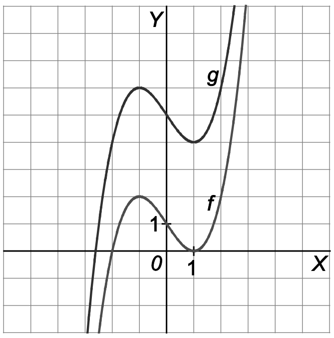
c) $g(x)=3f(x)$

d) $h(x)=f(x)-1$

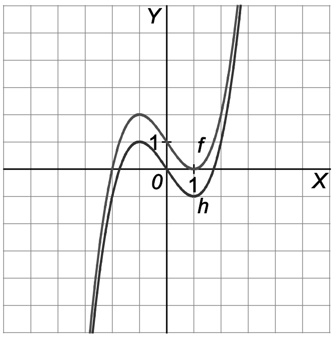
e) $h(x)=f(x-1)$

f) $h(x)=f(3x)$

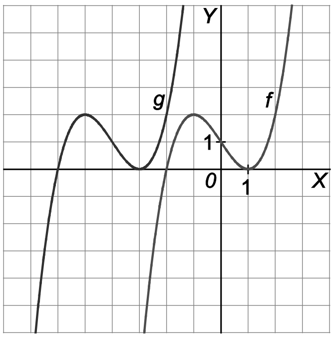
a) *g* se obtiene mediante una traslación vertical, subiendo la gráfica de *f* 4 unidades.



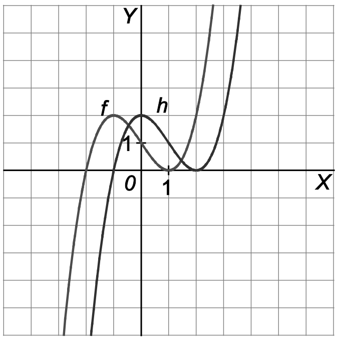
d) *h* se obtiene mediante una traslación vertical, bajando la gráfica de *f* 1 unidad.



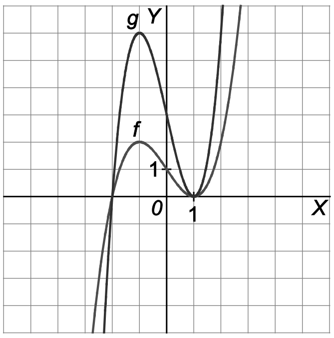
b) *g* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 4 unidades hacia la izquierda.



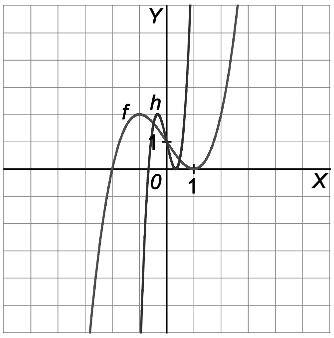
e) *h* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 1 unidad hacia la derecha.



c) *g* se obtiene a partir de *f* mediante una dilatación vertical.



f) *h* se obtienea partir de *f* mediante una dilatación horizontal.



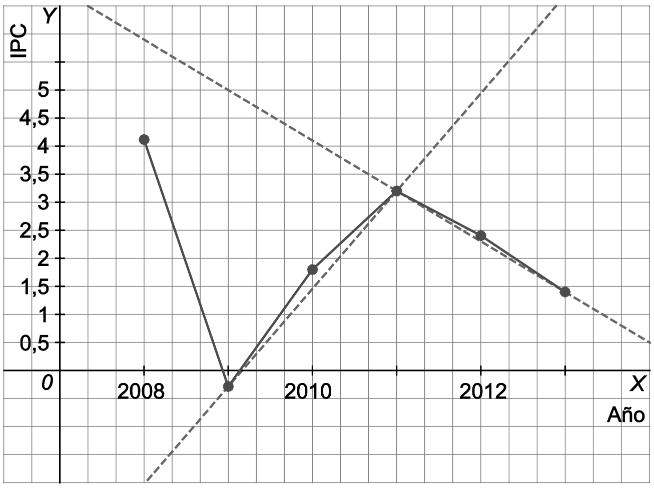
20. Ejercicio resuelto.

21. Se tienen los siguientes datos sobre la evolución del índice de precios al consumo (IPC).

Año	2008	2009	2010	2011	2012	2013
IPC	4,1	–0,3	1,8	3,2	2,4	1,4

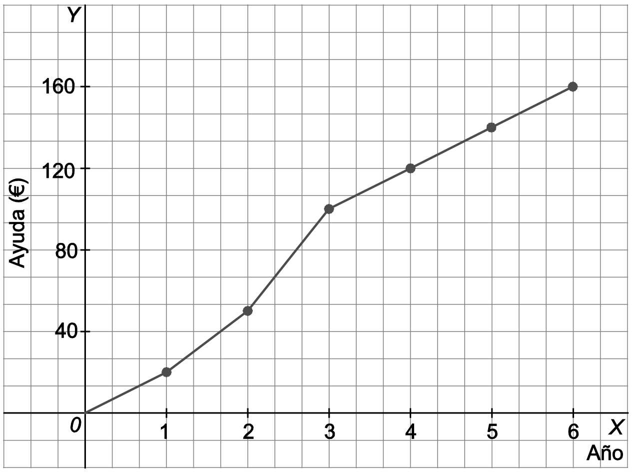
Representa gráficamente los datos y halla el máximo intervalo para el que la gráfica se aproxima a una recta.

La función se aproxima a una recta en el intervalo [2011, 2013].



22. La siguiente tabla expone la ayuda municipal que recibe una familia en función del número de hijos. Representa los datos y estudia para qué intervalo se puede aproximar por una recta.

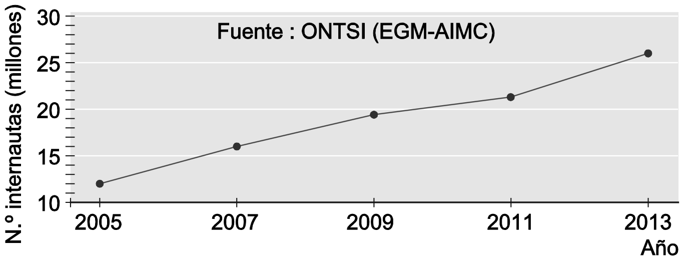
N.º de hijos	1	2	3	4	5	6
Ayuda (€)	20	50	100	120	140	160

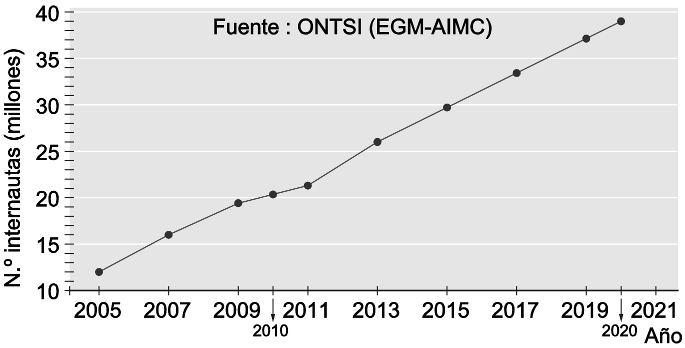


La función se puede aproximar por una recta en el intervalo [3, 6].

23. Ejercicio resuelto.

24. En la gráfica de la derecha se ha representado el número de personas que usan Internet al menos una vez al mes en España en los últimos años. Interpolando y extrapolando gráficamente, estima cuántos había en 2010 y cuántos habrá en 2020.





25. Ejercicio resuelto.

26. La población de cierto municipio en el año 2008 fue de 179 000 habitantes, y en 2013 era de250 000.

a) Calcula aproximadamente mediante interpolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en el año 2010.

b) Estima por extrapolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en 2015.

a) Se calcula la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por $A(2008, 179000)$ y $B(2011, 250000)$:

Como la recta pasa por *A* entonces: $y(2008) = 179\,000 \Rightarrow 179\,000 = 2008m + n$.

Como la recta pasa por *B* entonces: $y(2013) = 250\,000 \Rightarrow 250\,000 = 2013m + n$.

Se resuelve el sistema: $\begin{cases} 179\,000 = 2008m + n \\ 250\,000 = 2013m + n \end{cases} \Rightarrow m = 14\,200;\ n = -28\,334\,600$.

Por tanto se obtiene la ecuación: $y = 14\,200x - 28\,334\,600$.

Sustituyendo, en dicha ecuación, *x* por 2010, se obtiene $y = 14200 \cdot 2010 - 28\,334\,600 = 207\,400$.

Así pues se estima que en 2010 hubo una población de 207 400 habitantes.

b) Sustituyendo, en dicha ecuación, *x* por 2015, se obtiene $y = 14\,200 \cdot 2015 - 28\,334\,600 = 278\,400$

Así pues se estima que en 2015 hubo una población de 278 400 habitantes.

27. Iván está intentando ahorrar electricidad. La factura de enero fue de 56 €, la de febrero la perdió, en marzo gastó 36€,y en abril 34,50€.

a) Estima cuál fue su gasto en febrero y lo que pagará en mayo.

b) ¿Crees que con estos datos la predicción para diciembre sería fiable?

a) Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Se asigna el número 1 al mes de enero, 2 a febrero, …, hasta diciembre que sería el 12.

Sea x el número correspondiente a cada mes e y el correspondiente al gasto eléctrico.

Se debe hallar la recta de interpolación $y = ax + b$ que pasa por los puntos $A(1, 56)$ y $B(3, 36)$.

Dicha recta es $y = -10x + 66$ .El gasto en febrero,x= 2, será: $y = -10 \cdot 2 + 66 = 46$ €.

Para interpolar la factura de mayo se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, marzo y abril. El gasto en mayo se estima en $y = -1{,}5 \cdot 5 + 40{,}5 = 33$ €.

b) Interpolando a partir de los datos de marzo y abril, que son los más cercanos a diciembre, x= 12, la predicción es: $y = -1{,}5 \cdot 12 + 40{,}5 = 22{,}5$ €.

Este dato no es fiable, ya que no parece lógico que el gasto eléctrico en diciembre seamenor que el de mayo.

Esto se debe a que los datos que se utilizan para estimar el gasto de diciembre están muy alejados de él.

28. Ejercicio resuelto.

29. Se tienen tres datos sobre los beneficios de una empresa en tres meses distintos:

Meses	1.º	4º.	5.º
Beneficios (miles de **€**)	0	3	0

a) Encuentra la función cuadrática que se ajusta a estos tres datos.

b) ¿Qué beneficios o pérdidas se estiman para el 6.º mes?

c) ¿En qué mes se obtiene el beneficio máximo?

a) Llamando x a los meses e y a los beneficios, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(4,3)$ y $C(5,0)$.

Como pasa por el punto A, $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

Como pasa por el punto B, $f(4) = 3 \Rightarrow 16a + 4b + c = 3$.

Como pasa por el punto C, $f(5) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$.

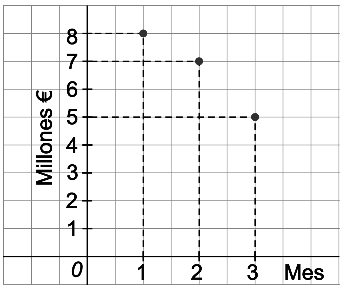
La solución del sistema resultante $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ 25a + 9b + c = 0 \end{cases}$ es $a = -1,\ b = 6,\ c = -5$.

Por lo que la función cuadrática es $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

b) El balance estimado del 6º mes es $f(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -5$, que representan unas pérdidas de 5000 **€**.

c) Como la parábola interpoladora, $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, es cóncava hacia abajo, su vértice, que es el punto $V(3, 4)$ será un máximo absoluto, El beneficio máximo será de 4000 **€**y se conseguirá en el tercer mes.

30. La figura muestra el volumen de ventas de una gran superficie comercial a lo largo de tres meses consecutivos. Encuentra la función cuadrática que se ajusta a esos tres datos. ¿Qué ventas se esperan para el siguiente mes?



La parábola pasa por los puntos $A(1,8)$, $B(2,7)$ y $C(3,5)$.

Como pasa por el punto *A*, $f(1)=8 \Rightarrow a+b+c=8$.

Como pasa por el punto *B*, $f(2)=7 \Rightarrow 4a+2b+c=7$.

Como pasa por el punto *C*, $f(3)=5 \Rightarrow 9a+3b+c=5$.

La solución del sistema resultante $\begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ es $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=8$.

La función cuadrática resultante es $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+8$.

Para $x=4$ se obtiene: $f(4)=-\frac{16}{2}+\frac{4}{2}+8=2$.

Así pues, para el mes siguiente, se esperan unas ventas de 2 millones de €.

31. Ejercicio interactivo.

32. Indica qué tipo de interpolación es el más adecuado en cada situación. Determina en cada caso su función de interpolación.

a) El número de personas que estaba en el paro en una ciudad en febrero si el número de parados durante los meses de Enero, Marzo y Abril son los que figuran en la tabla.

Mes	Enero	Marzo	Abril
N.º de personas	2500	2420	2360

b) Los beneficios de una empresa en el mes de febrero conociendo los siguientes datos.

Mes	Enero	Marzo	Abril
Beneficios (en euros)	230 000	255 000	220 700

c) El coste en pintura para decorar un cuadrado de 10 m de lado con los siguientes datos.

Lado (en metros)	5	15	25
Coste (en euros)	200	400	900

a) Como el número de parados es siempre decreciente en los meses indicados parece razonable emplear la interpolación lineal.

Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Llamando mes 1 al mes de enero, *x,*al número de mes, e *y,* al número de parados, se calcula la recta de interpolación $y=ax+b$ que pasa por los puntos $A(1, 2500)$ y $B(3, 2420)$.Esta recta es $y=-40x+2540$.

b) Como los beneficios crecen primero y después decrecen, parece adecuado utilizar la interpolación parabólica.Llamando mes 1 al mes de enero, *x,* al número de mes, e *y,*a los beneficios en miles de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(1, 230)$, $B(3, 255)$ y $C(4; 220{,}7)$. Esta parábola es $y=-\frac{78}{5}x^2+\frac{749}{10}x+\frac{1707}{10}$.

c) Como en la situación del problema intervienen áreas se emplea la interpolación cuadrática, pues la variable dependiente está estrechamente relacionada con el cuadrado de la variable independiente (el área es el cuadrado del lado).

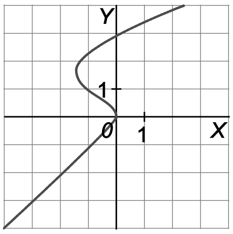
Llamando *x* al lado del cuadrado en metros,e *y,* al coste en cientos de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(5, 2)$, $B(15, 4)$ y $C(25, 9)$. Esta parábola es

$$y=-\frac{3}{200}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{17}{8}$$

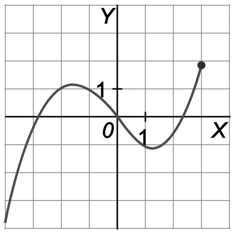
33 a 39. Ejercicios resueltos.

40. Analiza razonadamente si las siguientes gráficas corresponden o no a funciones reales de variable real.

a)



b)



Se dice que una relación entre dos variables *x* e *y*es una función, si a cada valor de *x* le corresponde un único valor de*y*, es decir si a cada valor de *x* le corresponde una única imagen *f*(*x*).

a) Esta gráfica no corresponde a una función pues hay valores de *x* a los que les corresponde más de una imagen. Por ejemplo, a $x = 0$ le corresponden dos imágenes: $y = 0$ e $y = 3$.

b) Esta gráfica sí corresponde a una función porque no hay valores de x a los que les corresponda más de una imagen. En este caso se observa que sí que hay varios valores de x a los que les corresponde una misma imagen y. Por ejemplo, a $x = -3$ y $x = 0$ le corresponde el mismo valor $y = 0$, pero eso no contradice en absoluto la definición de función.

41. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$

e) $f(x) = \sqrt{(x-1)(2x+3)}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

g) $f(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

h) $f(x) = \log(5-x)$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

e) $D(f) = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

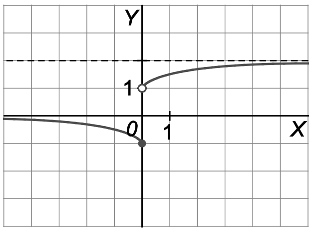
f) $D(f) = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

g) $D(f) = (-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$

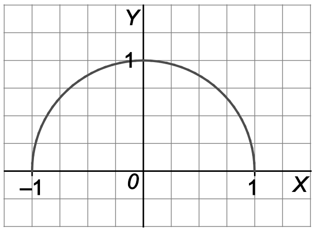
h) $D(f) = (-\infty, 5)$

42. Dadas las siguientes gráficas de funciones, indica su dominio y su recorrido.

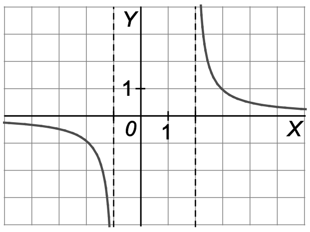
a)



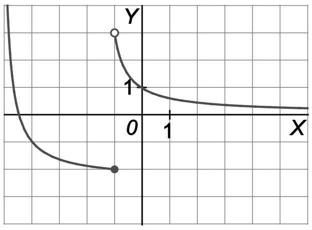
c)



b)



d)



a) $D(f) = \mathbb{R}$

$R(f) = [-1, 0) \cup (1, 2)$

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $D(f) = [-1, 1]$

$R(f) = [0, 1]$

d) $D(f) = (-5, +\infty)$

$R(f) = [-2, +\infty)$

43. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados y establece su dominio.

a) A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

b) Un comercial cobra un fijo de 500 €al mes más un 2% de la facturación que haya obtenido durante dicho mes. Escribe la función que da el sueldo del comercial en función de dicha facturación mensual.

c) En una clase se tiene un diccionario por cada alumno, un atlas por cada dos alumnos y un ordenador por cada tres. Se pide la función que da el número total de materiales de apoyo que hay en la clase en función del número de alumnos de la misma.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ $\quad D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 500 + 0{,}02x$ $\quad D(f) = [0, +\infty)$

c) $f(x) = x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} \Rightarrow f(x) = \dfrac{11x}{6}$ $\quad D(f) = \{6n : n \in \mathbb{N}\}$ = “números naturales múltiplos de 6”

44. Para costearse el viaje de fin de curso, los alumnos de bachillerato deciden montar una miniguardería por las tardes para cuidar niños. El coste del local es de 500 € por mes; la licencia que exige el ayuntamiento asciende a 200 €; y además, van a invertir 100 € en imprimir unos folletos de propaganda. A los padres les cobrarán 20 €por cada tarde que pase su hijo en la guardería y cada cuidador se llevará 10 €por cada niño que tenga a su cargo.

a) ¿Cuáles son los gastos fijos que tendrán el primer mes?

b) ¿Cuántos niños tendrán que cuidar el primer mes para cubrir gastos?

c) Expresa como una función el beneficio o pérdida en función del número mensual de niños atendidos.

d) ¿Qué beneficios obtendrán si atienden a cien niños durante el primer mes?

a) 500 € del local + 200 € de licencia + 100 €de propaganda =800 €.

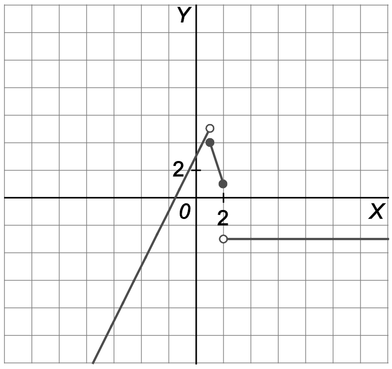
b) Ingresos – Gastos = $20x - (500 + 200 + 100 + 10x) = 10x - 800 = 0 \Rightarrow x = 80$. Deberán cuidar 80 niños.

c) $B(x) = 10x - 800$, pues Beneficios = Ingresos – Gastos

d) $B(100) = 10 \cdot 100 - 800 = 200$ €.

Funciones definidas a trozos

45. Representa la gráfica de $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si} \quad x<1\\ -3x+7 & \text{si} \quad 1\le x\le 2\\ -3 & \text{si} \quad x>2\end{cases}}$ **y calcula** $\boldsymbol{f(-2)}$**,** $\boldsymbol{f(0)}$**,** $\boldsymbol{f(1)}$**,** $\boldsymbol{f(2)}$**,** $\boldsymbol{f(5)}$.



Para $x=-2$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(-2)=2(-2)+3=-1$.

Para $x=0$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(0)=2\cdot 0+3=3$.

Para $x=1$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(1)=-3\cdot 1+7=4$.

Para $x=2$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(2)=-3\cdot 2+7=1$.

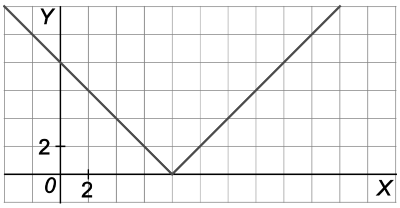
Para $x=5$ se cumple que $x>2$ por lo que $f(5)=-3$.

46. Expresa como funciones definidas a trozos y dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

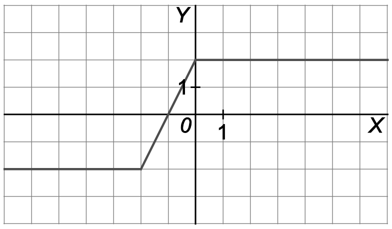
a) $f(x)=|8-x|$

b) $f(x)=|x+2|-|x|$

a) $f(x)=\begin{cases}8-x & \text{si} \quad x<8\\ x-8 & \text{si} \quad x\ge 8\end{cases}$

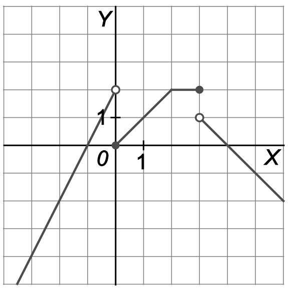


b) $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<-2\\ 2x+2 & \text{si} \quad -2\le x<0\\ 2 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$

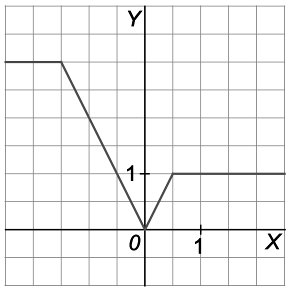


47. Encuentra las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad 0\le x<2\\ 2 & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ -x+4 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si} \quad x<-\dfrac{3}{2}\\ -2x & \text{si} \quad -\dfrac{3}{2}\le x<0\\ 2x & \text{si} \quad 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 1 & \text{si} \quad x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Operaciones con funciones

48. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ y $t(x) = 1 - x^2$, calcula las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(f-t)(x)$ **d)** $(ht)(x)$ **g)** $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

b) $(h+t)(x)$ **e)** $(fh)(x)$ **h)** $(gg)(x)$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ **f)** $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)$ **i)** $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = [2, +\infty)$, $D(h) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, $D(t) = \mathbb{R}$

a) $(f-t)(x) = 2x^2 - x - 3$ $D(f-t) = \mathbb{R}$

b) $(h+t)(x) = \dfrac{-x^4 + 5x^2 - 3}{x^2 - 4}$ $D(h+t) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 - 4)$ Como h nunca se anula, $D\left(\dfrac{f}{h}\right) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

d) $(ht)(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 4}$ $D(ht) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

e) $(fh)(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \dfrac{x+1}{x+2}$ $D(fh) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

f) $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x^2} = \dfrac{x-2}{1-x}$ Como t se anula en $x = 1$ y en $x = -1$, $D\left(\dfrac{f}{t}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2 - x - 2}$ Como f se anula en $x = 2$ y en $x = -1$, $D\left(\dfrac{g}{f}\right) = (2, +\infty)$.

h) $(gg)(x) = 2x - 4$ $D(gg) = [2, +\infty)$

i) $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x) = (1 - x^2)(x^2 - x - 2)(x^2 - 4) = -(x-1)(x+1)^2(x-2)^2(x+2)$. Como h nunca se anula $D\left(\dfrac{tf}{h}\right) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

49. Dadas las funciones $f(x) = 1 - x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ y $g(x) = \sqrt{4 - 2x}$, halla estas funciones y sus dominios.

a) $(f \circ f)(x)$ **b)** $(h \circ g)(x)$ **c)** $(g \circ f)(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = (-\infty, 2]$; $D(h) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

a) $(f \circ f)(x) = f(1 - x^2) = 1 - (1 - x^2)^2 = -x^4 + 2x^2$; $D(f \circ f) = \mathbb{R}$

b) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\sqrt{4-2x}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{4-2x}\right)^2 - 4} = \dfrac{1}{4 - 2x - 4} = -\dfrac{1}{2x}$

Para $x = 0$ $g(0) = \sqrt{4} = 2$, valor que anula el denominador de $\dfrac{1}{x^2 - 4}$, por lo que $D(h \circ g) = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

50. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\dfrac{3}{x}$ y $h(x)=\sqrt{x}$, calcula la expresión analítica de estas funciones:

a) $(f\circ g\circ h)(x)$ **b)** $(g\circ f\circ h)(x)$ **c)** $(f\circ h\circ g)(x)$ **d)** $(h\circ g\circ f)(x)$

a) $(f\circ g\circ h)(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)=f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2-1=\dfrac{9}{x}-1$ $D(f\circ g\circ h)=(0,+\infty)$

b) $(f\circ h\circ g)(x)=f\left(h\left(g(x)\right)\right)=f\left(h\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)=f\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)^2-1=\dfrac{3}{x}-1$ $D(f\circ h\circ g)=(0,+\infty)$

c) $(g\circ f\circ h)(x)=g\left(f(h(x))\right)=g\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)=g\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right)=g(x-1)=\dfrac{3}{x-1}$ $D(g\circ f\circ h)=(0,1)\cup(0,+\infty)$

d) $(h\circ g\circ f)(x)=h\left(g\left(f(x)\right)\right)=h\left(g\left(x^2-1\right)\right)=h\left(\dfrac{3}{x^2-1}\right)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-1}}$ $D(h\circ g\circ f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Función inversa

51. Dada $f(x)=2x-1$, calcula $f^{-1}(x)$. Calcula $(f\circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1}\circ f)(x)$ y analiza los resultados.

$y=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$, por lo que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x)=2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-1=x$; $(f^{-1}\circ f)(x)=\dfrac{(2x+1)-1}{2}=x$; por tanto, $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

52. Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$ **b)** $g(x)=\sqrt{x^3-1}$ **c)** $h(x)=\log x$ **d)** $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

a) $y=\dfrac{2x-3}{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{-3-y}{3y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{2-3x}$ $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ $D(f^{-1})=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $y=\sqrt{x^3-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y^2+1}\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $D(g)=[1,+\infty)$ $D(g^{-1})=R(g)=[0,+\infty)$

c) $y=\log x\Rightarrow x=10^y\Rightarrow h^{-1}(x)=10^x$ $D(h)=(0,+\infty)$ $D(h^{-1})=\mathbb{R}$

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\Rightarrow x=\dfrac{1}{y^3}-2\Rightarrow t^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^3}-2$ $D(t)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D(t^{-1})=\mathbb{R}-\{0\}$

53. Calcula el valor de la función $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$ para $x=1$ y para $x=-2$. ¿Tiene f inversa? Justifica tu respuesta.

$f(1)=\dfrac{1^3+2}{1}=3$; $f(-2)=\dfrac{(-2)^3+2}{-2}=3$

Como $f(1)=f(-2)=3$ entonces la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=3$ en dos puntos, por lo que no existe la inversa de f.

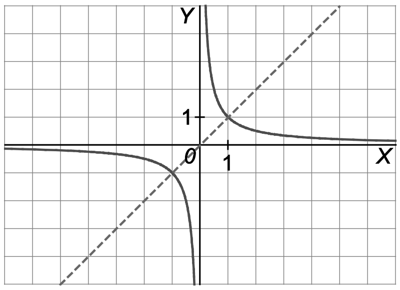
54. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

a) Calcula la función $(f\circ f)(x)$. ¿Qué conclusión obtienes?

b) Dibuja ahora la gráfica de *f*. Analizando dicha gráfica, ¿puedes corroborar tu conclusión del apartado anterior?

a) $(f\circ f)(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$. Así pues, la función y su inversa son iguales: $f=f^{-1}$.

b) A partir de la gráfica siguiente se observa que la función *f* es simétrica respecto de la recta $y=x$, por lo que se verifica que $f=f^{-1}$ como se comentaba en el apartado anterior.



Construcción de funciones por traslación y dilatación

55. A partir de la gráfica de $f(x)=x^2$ dibuja, utilizando traslaciones y dilataciones, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $a(x)=x^2-4$

b) $b(x)=x^2+2$

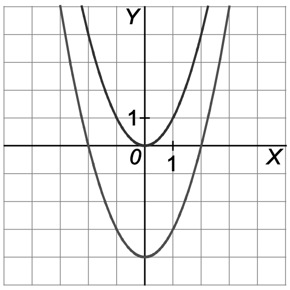
c) $c(x)=4x^2$

d) $d(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

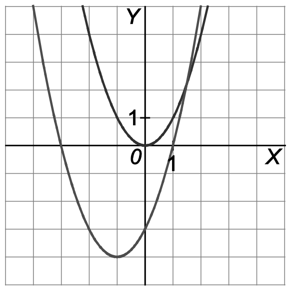
e) $e(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

f) $f(x)=3x^2+6x-4=3(x+1)^2-7$

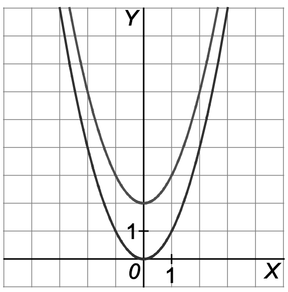
a) Traslación vertical de 4 unidades



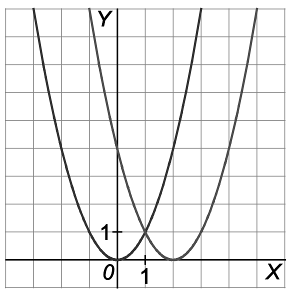
d) Traslación horizontal (1 u) y vertical (4 u)



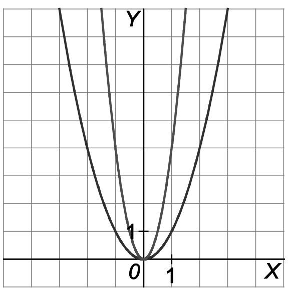
b) Traslación vertical de 2 unidades



e) Traslación horizontal de dos unidades

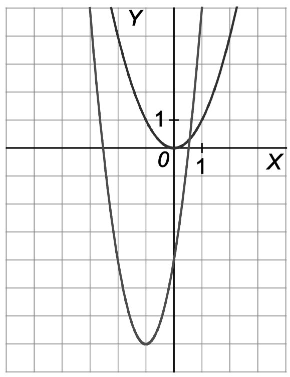


c)



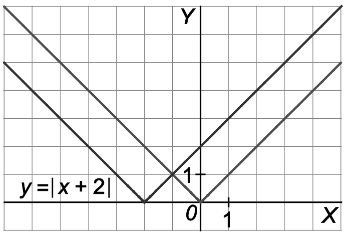
Dilatación vertical

f) Traslación horizontal (1 u), vertical (7 u) y dilatación

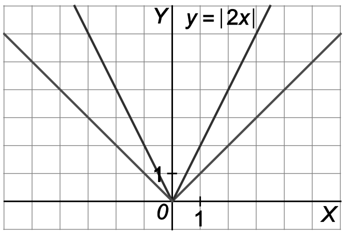


56. A partir de la gráfica de $j(x)=|x|$, dibuja, sin construir tablas de valores, las gráficas de las funciones:

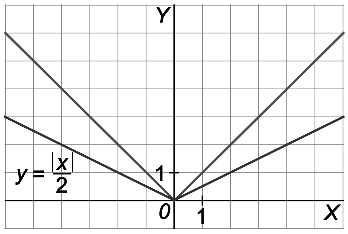
a) $a(x)=|x+2|$



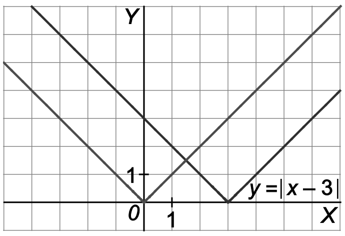
d) $d(x)=|2x|$



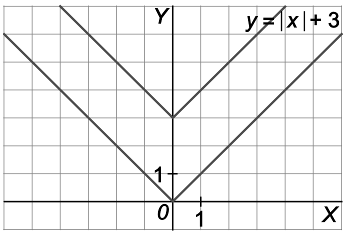
g) $g(x)=\dfrac{|x|}{2}$



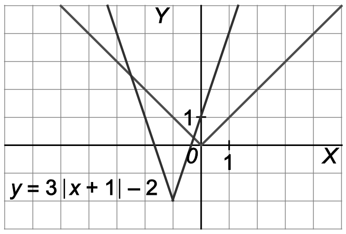
b) $b(x)=|x-3|$



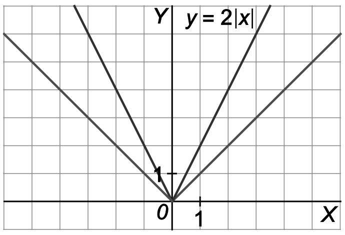
e) $e(x)=|x|+3$



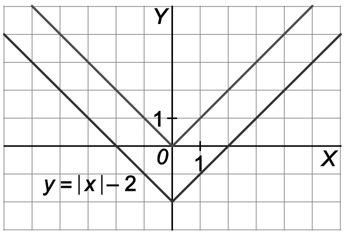
h) $h(x)=3|x+1|-2$



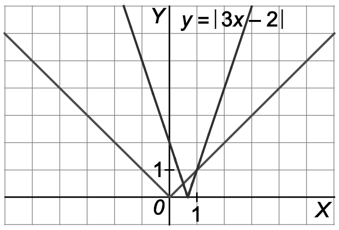
c) $c(x)=2|x|$



f) $f(x)=|x|-2$



i) $i(x)=|3x-2|$



Funciones definidas por tablas

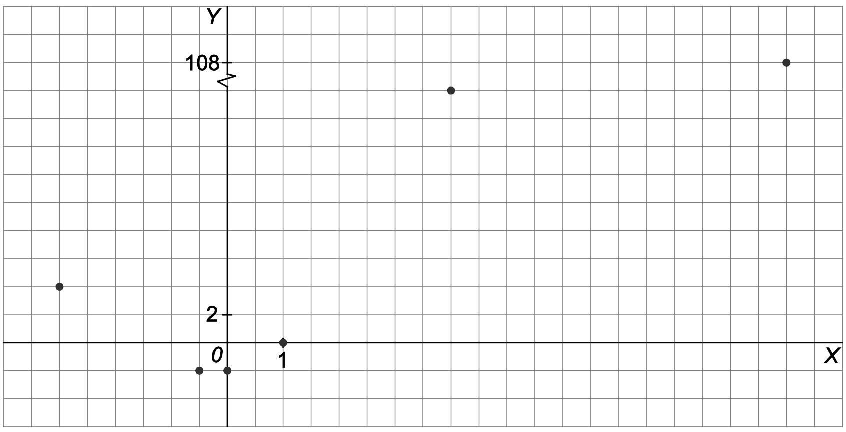
57. Representa gráficamente los datos de la siguiente tabla.

x	–3	–1	0	1	4	10
y	4	–2	–2	0	18	108

¿Qué tipo de curva se ajusta a esos datos? ¿Sabrías encontrar su ecuación?

Se descarta una recta, ya que hay crecimiento y decrecimiento. Así pues, se prueba una parábola.

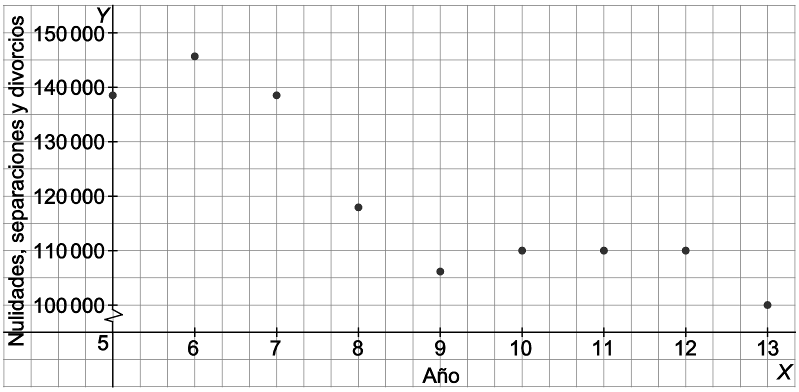
Se eligen los puntos más manejables y se busca la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(-1, -2)$, $B(0, -2)$ y $C(1, 0)$. Dicha parábola es: $f(x)=x^2+x-2$.



58. El número de nulidades, separaciones y divorcios en España durante los últimos años se recogen en la siguiente tabla.

2005	137 045
2006	145 919
2007	137 510
2008	118 939
2009	106 166
2010	110 321
2011	110 651
2012	110 764
2013	100 437

Representa gráficamente los datos anteriores, eligiendo escalas convenientes para su mejor comprensión.



59. Se ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba.

La siguiente tabla recoge la temperatura del líquido en función del tiempo de calentamiento.

Tiempo (minutos)	Temperatura (ºC)
0	20
1	24
2	28
3	32
4	36
5	40

Si el líquido hierve a los 60ºC, ¿cuánto tiempo tendremos que calentarlo, suponiendo que su comportamiento no varía?

Por cada minuto aumenta 4 ºC; la función es: $T(x) = 20 + 4x$ y por tanto, $60 = 20 + 4x \Rightarrow x = 10$, los 60 ºC los alcanzará a los 10 minutos.

Interpolación lineal

60. A Jorge se le ha roto la calculadora y necesita calcular el seno del ángulo de 27,4º para resolver un problema. Su abuelo le muestra un libro de matemáticas en el que hay una tabla de valores del seno. En ella, Jorge encuentra los dos siguientes datos: $\text{sen } 27^{\circ} = 0,454$ y $\text{sen } 28^{\circ} = 0,469$.

Ayuda a Jorge a calcular, por interpolación, una estimación del seno de 27,4º.

Llamando x al ángulo en grados, e y, al seno de dicho ángulo, la recta interpoladora, $y = ax + b$, es la que pasa por los puntos $A(27;\ 0,454)$ y $B(28;0,469)$.

$$\begin{cases} 27a + b = 0,454 \\ 28a + b = 0,469 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,015 \\ b = 0,049 \end{cases}$$

La recta de interpolación es pues, $y = 0,015x + 0,049$.

Por tanto, sen27,4º $= 0,015 \cdot 27,4 + 0,049 = 0,46$

Se puede comprobar que el valor real de sen 27,4º es 0,4602, por lo que el error cometido es mínimo.

61. De una función $f(x)$ se conocen los pares de valores $(1,2;\ 5,72)$ y $(4;\ 11,6)$.

Halla la ecuación de la recta de interpolación y el valor que tomará $f(x)$ para $x = 2,1$.

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 5,72 = 12m + n \\ 11,6 = 4m + n \end{cases}$, obteniendo las soluciones $m = 2,1$ y $n = 3,2$.

La recta de interpolación es, por tanto, $y = 2,1x + 3,2$.

El valor buscado es $y = 2,1 \cdot 2,1 + 3,2 = 7,61$.

62. Sabiendo que $f(x)$ es una función lineal, y conocidos los datos de la siguiente tabla, ¿qué valor toma $f(0)$?¿Y $f(3)$?

x	$f(x)$
1	6
5	4

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 6 = m + n \\ 4 = 5m + n \end{cases}$, obteniendo $m = -\frac{1}{2}$ y $n = \frac{13}{2}$.

La recta interpoladora es, por tanto, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$. $\quad f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{13}{2} = \frac{13}{2} \quad f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{13}{2} = 5$

63. Se ha observado que la vida media de una bacteria varía en función de la temperatura del medio en el que vive según la siguiente tabla.

Temperatura (ºC)	6	9	12	15	16
Vida media (min)	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

¿Qué vida media estimas para un cultivo de bacterias en un medio a 10ºC? ¿Y a 13ºC?

Para los 10ºC, se calcula la recta de interpolación que pasa por los puntos (9; 140,4) y (12; 181,7).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 140,4 = 9m + n \\ 181,7 = 12m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 13,77$ y $n = 16,5$.

La recta de interpolación es $y = 13,77x + 16,5$ y la vida media que se espera en un medio a10ºC es 154,2 min.

Para los 13 ºC, se calcula la recta que pasa por los puntos (12; 181,7) y (15; 220,2).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 181,7 = 12m + n \\ 220,2 = 15m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 12,83$ y $n = 27,7$.

La recta de interpolación es $y = 12,83x + 27,7$ y la vida media que se espera en un medio a 13ºC es 194,5 min.

Interpolación cuadrática

64. De una función *f*(*x*) se conocen los valores *f*(1)= 4, *f*(2)= 7 y *f*(4)=31.

a) Calcula la función cuadrática que toma dichos valores.

b) Calcula el valor de la función de interpolación para $x = 3$.

c) ¿Tiene sentido utilizar la función de interpolación hallada para estimar el valor de la función para $x=0$?

a) Se resuelve el sistema $\begin{cases} a+b+c & = & 4 \\ 4a+2b+c & = & 7 \\ 16+4b+c & = & 31 \end{cases}$, cuyas soluciones son $a= 3$, $b=–6$, $c= 7$; $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$.

b) $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = 16$

c) No parece adecuado utilizar la función hallada para estimar el valor de la función en $x= 0$, pues en los tres valores dados en el enunciado la función es creciente, por lo que parece lógico que, siguiendo esa tendencia, $f(0)$ estuviera por debajo de $f(1)= 4$. Sin embargo, usando la función hallada se estima $f(0)= 7$.

65. Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla.

Año	2013	2014	2015
Gasto en publicidad (× 1000 €)	1	3	5
Ingresos (× 1000 €)	4	26	64

a) Observa las variaciones que se producen en los gastos y en los ingresos, y decide qué tipo de interpolación es la más conveniente para reflejar la situación.

b) Calcula, mediante interpolación, qué ingresos se esperan si solo podemos gastar 4 500 €en publicidad.

c) Utiliza la función hallada en el apartado anterior para estimar que gasto en publicidad habría que hacer para ingresar 5000 €.

a) La variación en los gastos de publicidad es lineal, aumenta 2000 € cada año. En cambio, los ingresos no siguen esta ley lineal: primero aumentan 22 000 € y después 38 000 €. Por ello, se debe emplear la interpolación cuadrática.

Si se representan los datos sobre unos ejes se aprecia claramente que no se ajustan a una recta.

Llamando *x* a los gastos en publicidad en miles de €e *y* a los ingresos derivados en miles de €, se debe encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1,4)$, $B(3,26)$ y $C(5,64)$.

Dicha parábola es $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

b) Con 4 500 **€**destinados a publicidad, se estima que se alcanzarán unos ingresos de $f(4{,}5) = 2 \cdot 4{,}5^2 + 3 \cdot 4{,}5 - 1 = 53$, es decir, 53 000 €.

c) Se busca *x* para que $2x^2 + 3x - 1 = 50$.

Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones $x = –5{,}86$ y $x = 4{,}36$.

Desechando la solución negativa se concluye que el gasto ha de ser de unos 4355 €.

66. En un negocio de decoración solo venden alfombras cuya longitud es el doble que su anchura. Los precios, dependiendo del largo, se muestran en esta tabla.

Largo (m)	Precio (€)
1	120
2	124
5	148

a) Calcula por interpolación cuadrática el precio de una alfombra de 3 metros de longitud.

b) Calcula por extrapolación cuadrática el precio de una alfombra de 8 metros de longitud.

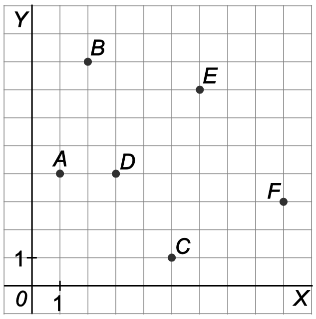
Llamando *x* a los metros del largo, e *y,* al precio en €, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1, 120)$, $B(2, 124)$ y $C(5, 148)$. Dicha parábola es $f(x) = x^2 + x + 118$.

a) El precio de una alfombra de 3 m de largo será de $f(3) = 3^2 + 3 + 118 = 130$ €.

b) El precio de una alfombra de 8 m de largo será de $f(8) = 8^2 + 8 + 118 = 190$ €.

67. Calcula dos funciones cuadráticas, una que pase por los puntos *A*, *B* y *C*, y la otra, por *D*, *E* y *F*.

¿En qué punto se cortan ambas funciones?¿Corresponde a un valor interpolado o extrapolado de las parábolas?



Para hallar la función cuadrática que pasa por *A*(1, 4), *B*(2, 8) y *C*(5, 1) hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{19}{12}x^2 + \frac{35}{4}x - \frac{19}{6}.$$

Para hallar la función cuadrática que pasa por *D*(3, 4), *E*(6, 7) y *F*(9, 3) se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 7 \\ 81a + 9b + c = 3 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{9}{2}x - 6.$$

Sus puntos de corte son (–0,57; –8,71) y (4,13; 5,95).

El primero es un valor extrapolado de ambas parábolas, y el segundo es interpolado de ambas.

Aplicaciones de la interpolación

68. Un agricultor ha comprado una hectárea de terreno y quiere plantar almendros. Sabe que si planta almendros en exceso no podrá regarlos convenientemente y la producción será baja. Para decidir cuántos almendros plantar, ha hecho un estudio en los campos vecinos del rendimiento obtenido y ha elaborado la siguiente tabla.

Número de almendros	40	60	90
Kilos de almendras	20 000	24 000	22 500

a) Un amigo le aconsejó que plantara 50 almendros. ¿Cuántos kilos de almendras espera obtener en ese caso?

b) ¿Con cuántos almendros conseguiría la producción máxima?

Como los kilos de almendras crecen primero y después decrecen, es claro que la interpolación lineal no es adecuada. Además, como intervienen áreas, parece conveniente trabajar con la interpolación cuadrática. Llamando *x* al número (en decenas) de almendros, e *y,* a los miles de kilos de almendras producidos, se debe encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(4, 20)$, $B(6, 24)$ y $C(9; 22{,}5)$.

Dicha parábola es $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 7x$.

a) Con 50 almendros plantados se espera una producción de $f(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 = 22{,}5$, es decir, 22 500 kg.

b) Como la parábola está abierta hacia abajo, el máximo se alcanzará en su vértice, que es el punto $V(7; 24{,}5)$.

Es decir, plantando 70 almendros se espera conseguir la máxima producción, que asciende a 24 500 kg de almendras.

69. Las ventas de un determinado producto han variado en función de su precio de acuerdo a los datos de la tabla.

Precio (miles de €)	Unidades vendidas
100	20 000
110	23 000
120	21 500
130	18 500

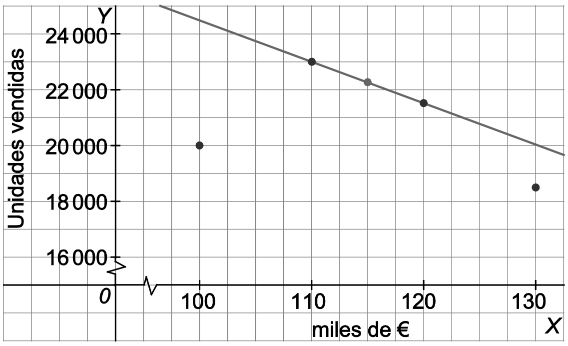
a) Halla la función de interpolación que se ajuste a los datos dados y calcula las ventas esperadas para un precio de 115 000 €.

b) Representa gráficamente los datos y la curva de interpolación en esa zona de valores.

a) Para hacer la interpolación se usarán los datos más próximos a 115 000 €, (110, 23000) y (120, 21500). La función de interpolación lineal es $f(x) = -150x + 39\,500$.

Las ventas esperadas para un precio de 115 000 € son $f(115) = -150 \cdot 115 + 39500 = 22\,250$ artículos.

b)



70. Una oruga está atacando a un bosque de pinos y los forestales están anotando el número de árboles afectados en función de los días transcurridos desde la irrupción de la plaga:

Días desde el comienzo de la plaga	2	4	6
Número de pinos infectados	10	14	22

a) Empleando técnicas de extrapolación lineal basándose en los datos de los días 4.º y 6.º, ¿cuál será la estimación de pinos infectados al cabo de nueve días?

b) Empleando técnicas de extrapolación cuadrática, ¿cuál será la estimación de pinos infectados tras nueve días?

c) Los forestales han estimado que si se infectan 430 ejemplares, habrá que comenzar a talar el bosque para que no se expanda la oruga. Si no se controla la plaga, ¿cuándo habrá que comenzar la indeseada tala, si trabajamos con la extrapolación cuadrática?

a) La función de interpolación para los datos (4, 14) y (6, 22) es $f(x) = 4x - 2$ así que al cabo de 9 días el número de pinos infectados será $f(9) = 4 \cdot 9 - 2 = 34$.

b) La función de interpolación cuadrática para los tres datos es: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 10$ y el número estimo de pinos infectados a los 9 días sería $g(9) = \frac{1}{2} \cdot 9^2 - 9 + 10 = 41{,}5$, es decir, estaría entre 41 y 42.

c) Resolvemos $\frac{1}{2}x^2 - x + 10 = 430$ cuyas soluciones son $x = -28$ y $x = 30$. Desechamos la solución negativa y concluimos que habrá que comenzar a talar a los 30 días de comenzada la plaga.

CUESTIONES

71. Determina si las expresiones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ corresponden a la misma función.

Como $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}$, $f(x)$ y $g(x)$ coinciden en todos sus puntos excepto en $x = 2$, donde $f(2) = 1$ y la función $g(x)$ no está definida, ya que $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{2\}$. Luego no es la misma función.

72. ¿Puede haber funciones cuya gráfica sea simétrica respecto del eje de abscisas?

No, pues eso significaría que todos los valores del dominio tendrían más de una imagen.

73. ¿Qué tipo de gráfica tiene una función con dominio todos los números reales y recorrido un único número real?

Si la función *f* verifica que $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = \{a\}$, su gráfica es la recta $y = a$.

74. ¿Una función que incluya un valor absoluto con la variable en su interior, ¿se puede escribir siempre como una función definida a trozos?

No, pues puede ocurrir que las expresiones dentro del valor absoluto no cambien de signo con lo que no tiene sentido definirla a trozos. Por ejemplo: $f(x) = |x^2 + 1| = x^2 + 1$

75. La gráfica de la función $f(x) = |g(x)| + |h(x)|$, siendo *g* y *h* polinomios de primer grado, ¿está formada por segmentos de recta?

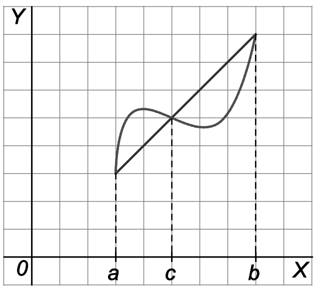
Sí, pues si $g(x)$ cambia de signo en a y $h(x)$ lo hace en b con, por ejemplo, $\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x < a \\ g(x) < 0 & \text{si } x > a \end{cases}$, $\begin{cases} h(x) > 0 & \text{si } x < b \\ h(x) < 0 & \text{si } x > b \end{cases}$ con $a<b$, la función $f(x) = |g(x)| + |h(x)|$ sería: $\begin{cases} g(x) + h(x) & \text{si } x \le a \\ -g(x) + h(x) & \text{si } a < x \le b \\ -g(x) - h(x) & \text{si } x > bx \end{cases}$

que, al ser *g* y *h* polinomios de primer grado, verificaría que su gráfica estaría formada por segmentos de rectas.

76. Razona si es verdadera o inexacta la siguiente afirmación:

"Si *f* es una función definida en el intervalo [*a*, *b*] y *c* es un número de ese intervalo, el valor de *f*(*c*) obtenido por interpolación lineal entre *a* y *b* coincide con el verdadero valor de *f*(*c*) sólo si la gráfica de *f* es rectilínea en ese intervalo".

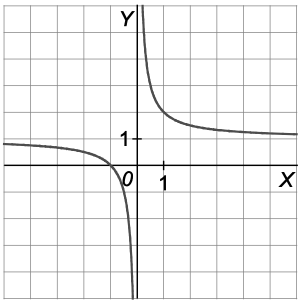
La afirmación es falsa, pues la gráfica de *f* puede cortar al segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en el punto $(c, f(c))$ como muestra la figura.



77. ¿Qué grado debería tener un polinomio de interpolación si queremos que pase exactamente por cinco puntos que correspondan a datos experimentales?

El grado de dicho polinomio $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ debería ser menor o igual que 4 pues sus coeficientes a, b, c, d, e serían las incógnitas de un sistema lineal con cinco ecuaciones. Si $a = 0$, el grado sería menor que 4.

78. **La gráfica de la figura representa una función que es cociente de dos polinomios *P* y *Q*, esto es, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. ¿Qué se puede decir sobre las raíces del polinomio *Q*?**



La única raíz de $Q(x)$ es $x = 0$, pues $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

79. **¿Tiene inversa la función $f(x)= x^3 - x$?**

$f(x)$ no tiene inversa, pues como $f(-1) = f(1) = 0$, f^{-1} debería tener dos imágenes en $x = 0$, es decir $f^{-1}(0) = -1$ y a la vez $f^{-1}(0) = 1$.

80. **Si las gráficas de las funciones *f* y *g*, ambas con dominio todos los números reales, coinciden para todos los valores del intervalo [0, 4] pero luego no coinciden, ¿pueden ser ambas funciones polinómicas?**

La función $f - g$ es idénticamente nula en [0, 4], luego ambas no pueden ser polinómicas, pues si lo fueran el polinomio $f - g$ tendría infinitas raíces.

PROBLEMAS

81. **Las funciones de oferta y demanda de un tipo de ordenador portátil vienen dadas, respectivamente, por $q(p) = 0{,}50p - 30$ y $r(p) = 600 - 0{,}25p$; *p* en €.**

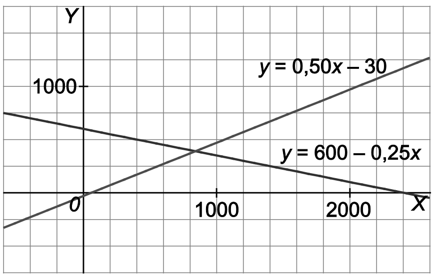
a) ¿Cuáles son las cantidades ofertadas y demandadas si el precio es de 500, 700 o 900 €?

b) Represéntalas y halla el precio de equilibrio (aquel en el que el valor de ambas funciones coincide).

a) Oferta: $q(500) = 220$; $q(700) = 320$; $q(900) = 420$. Demanda: $r(500)=475$; $r(700)=425$; $r(900)=493{,}75$

b) El precio de equilibrio, *p*, que vendrá dado por la solución de la ecuación $q(p) = r(p)$, es decir:

$0{,}50p - 30 = 600 - 0{,}25p$ da como solución $p = 840$ €.



82. El franqueo de las cartas varía según su peso, como se indica en la tabla:

Peso (g)	Precio (€)
Hasta 20	0,38
Hasta 50	0,54
Hasta 100	0,92
Hasta 500	2,03
Hasta 1000	4,58
Hasta 2000	5,19

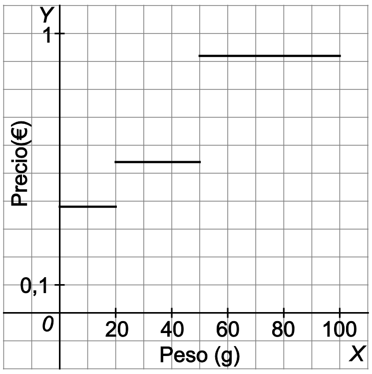
a) ¿Cuánto costaría franquear una carta de 145g?

b) Representa la gráfica de la función que nos indica el precio del franqueo según el peso de la carta. Elige adecuadamente la escala de los ejes para que se refleje toda la información.

c) ¿Es continua dicha función? ¿De qué tipo es?

a) Como 145 g se encuentra entre 100 y 500 gramos, costaría 2,03€.

b)

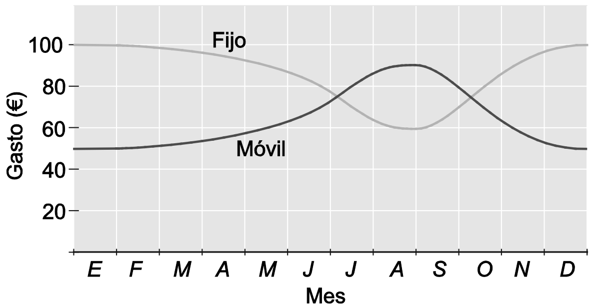


c) En la gráfica se observa que la función no es continua.Es una función escalonada, definida a trozos.

83. Esteban tiene dos teléfonos, uno fijo y uno móvil. Las curvas de la figura representan el gasto mensual en euros de cada uno de los dos teléfonos.

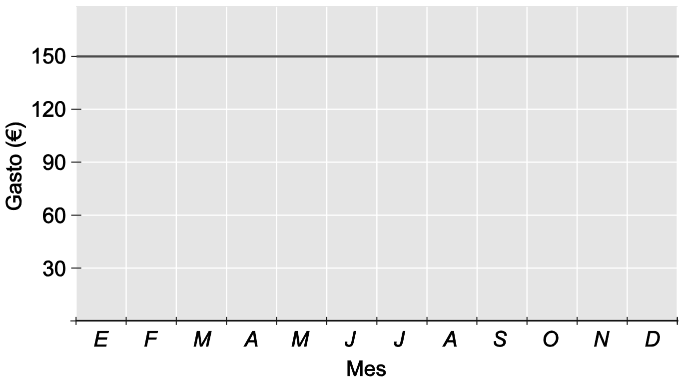
a) Explica en qué meses es más elevado el gasto en el teléfono móvil que en el fijo. ¿Por qué es así?

b) Dibuja la gráfica del gasto total mensual en teléfono de Esteban.



a) El gasto en el teléfono móvil es mayor que en el fijo en los meses de julio, agosto y septiembre, es decir, durante el verano. Resulta bastante razonable, pues es cuando más tiempo se pasa fuera de casa.

b)



84. Una empresa produce ratones inalámbricos para ordenadores de sobremesa y portátiles. Atendiendo a los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir ratones tiene un coste total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar p unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

a) $C_m(p) = \dfrac{C(p)}{p} = \dfrac{10p + 100000}{p} = 10 + \dfrac{100000}{p}$

b) $C_m(10) = 10010$; $C_m(1000) = 20$.

La diferencia está en los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, salario de los trabajadores, etc., que son fijos, independientemente del número de ratones producidos, y que serían un auténtico derroche si se produjeran sólo 10 ordenadores.

85. Se designa por x la temperatura expresada en grados Fahrenheit y por $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Celsius. Sabiendo que f es una función lineal de x y que $f(40)=\dfrac{40}{9}$ y $f(50)= 10$, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a 35 grados Fahrenheit?

b) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit hierve el agua?

c) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit se congela el agua?

a) Como f es una función lineal será de la forma $f(x) = ax+b$, por lo que:

$40a+b=\dfrac{40}{9}$ y $50a+b = 10$. Restando ambas ecuaciones se obtiene $10a = \dfrac{50}{9}$, $a = \dfrac{5}{9}$, $b = -\dfrac{160}{9}$.

Así pues, $f(x) = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$. Si $x = 35$, $f(x) = \dfrac{5}{9}35 - \dfrac{160}{9} = 1,7$ºC

b) Si $f(x) = 100$ºC, se tiene $100 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x=212$ºF.

c) Si $f(x) = 0$ºC, resulta $0 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x = 32$ºF.

86. En una gran reserva natural hay una población de antílopes pertenecientes a una especie en peligro de extinción. Se piensa que el número de estos animales durante el período 2000– 2015 ha evolucionado aproximadamente según la siguiente función $f(x)=-2300x+ 54\,000$, donde x representa el tiempo en años, de forma que $x= 0$ corresponde a 2000, y $f(x)$ denota el número de antílopes a final de año.

a) Calcula el número de antílopes en 2005.

b) ¿Cuántos antílopes mueren cada año?

c) Si la población continúa evolucionando de este modo, ¿en qué año se extinguirá?

a) $f(5) = -2300 \cdot 5 + 54\,000 = 42\,500$ antílopes.

b) El números de antílopes que mueren cada año es $f(x) - f(x+ 1)$, es decir:

$[-2300x+ 54000] - [-2300(x + 1) + 54000] = 2300$ antílopes.

c) A ese ritmo la población se extinguiría cuando $f(x) = 0$, es decir $x=\dfrac{54000}{2300} = 23,4$ años, o sea, por el año 2023.

87. Un parque natural ha tenido durante el verano pasado más visitantes de los esperados, por lo que el servicio de limpieza ordinario no ha podido retirar toda la suciedad que la masiva afluencia de público ha generado. Llegado el otoño, los encargados del parque se plantean hacer una inversión extraordinaria para eliminar la suciedad acumulada. El coste de eliminar el *p* % de esos restos expresado en miles de € es:

$$C(p)=\frac{16p}{110-p}$$

a) Sin hacer ningún cálculo, indica si esta función es creciente o decreciente.

b) Calcula cuánto costaría no eliminar ningún residuo, eliminar el 50% de los residuos y eliminarlos todos.

c) ¿Para qué puntos del dominio de *C* interesa en la práctica estudiar esta función? ¿Qué valores toma *C* en esa parte de su dominio?

d) Dibuja la gráfica de la función *C*.

e) ¿Qué proporción de la suciedad acumulada se podrá retirar si se aprueba una partida presupuestaria especial de 100 000 € destinada a tal fin?

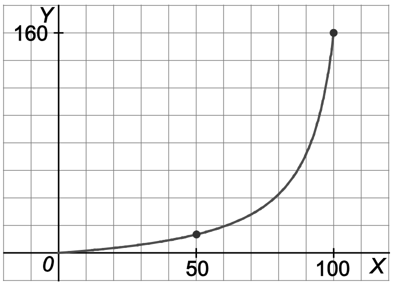
a) La función es naturalmente creciente, ya que cuántos más restos queramos eliminar más nos costarán. Si*p* aumenta, el numerador es más grande y el denominador más pequeño, por lo que la función crece.

b) Si $p=0$, $C(0)=0$. Si $p=50$, $C(p)=\frac{16\cdot 50}{60}=$ 13,3 mil €.

Si $p=100$, $C(p)=\frac{16\cdot 100}{10}=160$ mil €.

c) Los valores *p* que interesan son los del intervalo [0, 100], donde *C* toma valores entre 0 y 160 mil €.

d)



d) Si $C(p)=100$, entonces $100=\frac{16p}{110-p}$, $11000=116p$, $p=\frac{11000}{116}\simeq 95$ %.

88. El coste de la energía eléctrica se obtiene mediante una cantidad fija sumada a una variable proporcional a la cantidad de energía consumida. En dos meses distintos, Blanca ha pagado 71,40 € por 340 kWh, y 62,28 €,por 283 kWh.

- **En marzo pagó 71,40 € por 340 kW consumidos.**
- **En abril la factura fue de 62,28 €por 283 kWh.**

a) ¿Cuál es la cantidad fija que paga Blanca independientemente de su consumo mensual?

b) ¿Cuál es el importe de la factura en mayo si el consumo fue un 25 % más alto que el de abril?

a) Llamando *b* a la cantidad fija y *a* al precio del kWh,la función de coste, en euros, es $C(x)=ax+b$ donde *x* representa el gasto mensual en kWh.

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l}71{,}40=a\cdot 340\ +\ b\\ 62{,}28=a\cdot 283\ +\ b\end{array}\right\}$, y se obtiene que $a=\frac{9{,}12}{57}=0{,}16$ y $b=17$.

Por tanto Blanca paga una cantidad fija de 17 €.

b) El consumo en mayo será de 283 + 25% de 283 = 353,75 kWh.

La función coste $C(x)=0{,}16x\ +\ 17$ evaluada con ese consumo es de $C(353{,}75)=0{,}16\cdot 353{,}75\ +\ 17=73{,}6$ Por tanto, en mayo, el importe es de 73,6 €.

89. Un estudio de residuos urbanos recogidos en España ofrece los siguientes datos.

Años	Residuos urbanos (kg per cápita)
1995	510
1997	561
1999	615
2001	658

a) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 1998 en España.

b) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 2004 en España.

c) Estudios posteriores revelaron que en 2004 se recogieron 662 kilogramos de residuos per cápita en España. ¿Se ajusta el dato real al obtenido en la estimación anterior? ¿A qué crees que es debido?

a) A la vista de la tabla, las diferencias de residuos son proporcionales a las diferencias de años, es razonable pensar en obtener el resultado por interpolación lineal, por lo que si en 1997 fueron 561 kg y en 1999 fueron 615 kg, en 1998 serán aproximadamente $561+\frac{615-561}{2}=588$ kg.

b) Por extrapolación lineal, la ecuación de la recta, tomando como datos los años más próximos a 2004, a saber, 1999 y 2001 sería $y = mx + n$, con lo que tomando año cero a 1999 y año 2 a 2001, tendríamos el sistema $\begin{cases} 615 = n \\ 658 = 2m + n \end{cases}$, cuyas soluciones son $n = 615$ y $m = 21{,}5$,

con lo que al 2004, año 5, le corresponderían $21{,}5 \cdot 5 + 615 = 722{,}5$ kg.

c) El dato real es muy inferior a la estimación anterior, la razón estaba en que los ciudadanos han entendido que se pueden reciclar mucho material desechable.

90. La DGT ha hecho un estudio sobre la distancia media que recorre un vehículo al detenerse en función de su velocidad.

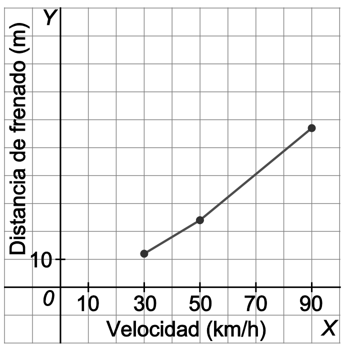
Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
30	12
50	24
90	57,6

a) Representa estos datos y decide qué tipo de interpolación es la adecuada para este problema.

b) Estima la distancia de frenado para un vehículo que circula a 80 kilómetros por hora.

c) Calcula la distancia de frenado para un coche que lleva una velocidad de 150 km/h.

a) A la vista de la gráfica, se observa que la interpolación cuadrática es la adecuada.



b) Podemos construir la parábola $y = ax^2+bx+c$ con los datos (30, 12), (50, 24) y (90, 57,6) mediante el sistema: $\begin{cases} 12 = 900a + 30b + c \\ 24 = 2500a + 50b + c \\ 57{,}6 = 8100a + 90b + c \end{cases}$

Resolviendo se obtiene $a = 0{,}004$, $b = 0{,}28$, $c = 0$. Por tanto, la parábola en cuestión es $y = 0{,}004x^2 + 0{,}28x$.

Si $x = 80$, $y = 0{,}004 \cdot 6400 + 0{,}28 \cdot 80 = 48$ m.

c) Si la velocidad es de 150 km/hora, la distancia de frenado será: $y = 0{,}004 \cdot 22\,500 + 0{,}28 \cdot 150 = 132$ m.

91. Furbi, una cría de chimpancé, gana peso semana tras semana según muestra la siguiente tabla.

Tiempo	Peso (kg)
Nacimiento	1,5
Semana 1	2,1
Semana 2	2,5
Semana 3	
Semana 4	3,3

Por un fallo de la báscula, su peso en la tercera semana no pudo determinarse. Calcúlalo por interpolación lineal.

$\left.\begin{array}{l}\text{semana 2: } 2{,}5\text{ kg}\\ \text{semana 4: } 3{,}3\text{ kg}\end{array}\right\}$, así que en la semana 3 pesaría aproximadamente $2{,}5+\dfrac{3{,}3-2{,}5}{2}=2{,}9$ kg.

92. La tabla siguiente muestra las temperaturas tomadas cada cuatro horas en una ciudad a lo largo de un día.

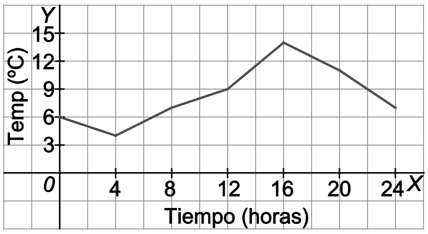
a) Representa los datos gráficamente.

b) Une los puntos obtenidos con segmentos y estima gráfica y analíticamente la temperatura a las 2 y a las 15 horas.

c) Señala los momentos del día en que la temperatura fue de 13 ºC aproximadamente.

Tiempo (horas)	Temperatura (ºC)
0	6
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

a)



b) Gráficamente:

2 horas → 5ºC

15 horas → 13ºC

Analíticamente (Interpolación lineal):

2 horas: $4+\dfrac{6-4}{2}=5$ºC

15horas: $\dfrac{T-9}{15-12}=\dfrac{14-9}{16-12}, T=9+\dfrac{15}{4}=12{,}75$ºC

c) A la vista de la gráfica, habría 13 ºC aproximadamente a las 17:30 y a las 15 horas.

93. Los aparcamientos públicos de cierta ciudad se rigen según una tarifa que explican en esta tabla.

Tiempo de estancia	Tarifa
De 0 a 30 minutos	0,0412 €/min
De 31 a 90 minutos	0,0370 €/min
De 91 a 660 minutos	0,0494 €/min
De 661 minutos hasta un máximo de 24 horas	31,6 €

a) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de dos horas? Recuerda que se redondea siempre en el último cálculo.

b) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de una hora?

c) Escribe la expresión analítica de la función que relaciona el precio con el tiempo de estacionamiento.

d) Con ayuda de algún programa informático, dibuja la gráfica correspondiente (de 0 hasta 800 minutos).

a) $120 \cdot 0{,}0494 = 5{,}928 \simeq 5{,}93$ **€**.

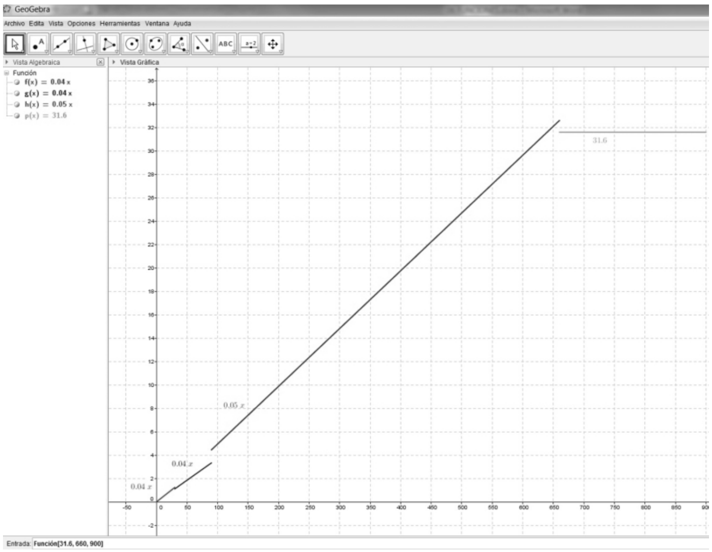
b) $60 \cdot 0{,}0370 = 2{,}22$ **€**.

c) Si x viene dado en minutos y $f(x)$ en €:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0412x & \text{si} \quad 0 < x \leq 30 \\ 0{,}0370x & \text{si} \quad 30 < x \leq 90 \\ 0{,}0494x & \text{si} \quad 90 < x \leq 660 \\ 31{,}6 & \text{si} \quad 660 < x \leq 1440 \end{cases}$$

donde x viene dado en minutos y $f(x)$ en euros**.**

d) La gráfica siguiente está hecha con el programa GeoGebra:



94. La entrenadora de un delfinario ha tomado algunos datos sobre los saltos que realiza el delfín Flipper.

Tiempo (décimas de segundo)	Altura (m)
0	0
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

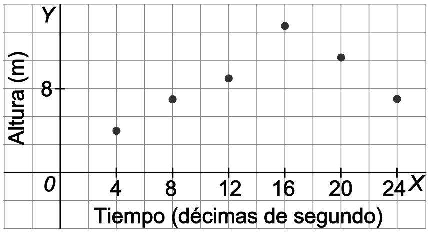
a) Razona qué tipo de interpolación usarías para calcular la altura que alcanza el delfín en determinados instantes.

b) Estima la altura que alcanza Flipper a los 1,5 segundos de iniciar su salto.

c) ¿Cuándo crees que consigue su altura máxima?

d) ¿Cuándo cae al agua?

a) Si representamos los datos gráficamente resulta una gráfica como la de la figura que sugiere que la interpolación cuadrática es la aconsejable.



b) Tomando como datos (4, 4), (16, 14) y (24, 7) la parábola

$y=ax^2+bx+c$ que pasa por esos puntos se calcula resolviendo el sistema $\begin{cases} 16a+4b+c=4 \\ 256a+16b+c=14 \\ 576a+24b+c=7 \end{cases}$.

$a=-\dfrac{41}{480}$, $b=\dfrac{61}{24}$, $c=-\dfrac{72}{15}$, por lo que $y=-\dfrac{41}{480}x^2+\dfrac{61}{24}x-\dfrac{72}{15}$

Si $x=15$, la altura alcanzada es $y=-\dfrac{41}{480}\cdot 15^2+\dfrac{61}{24}\cdot 15-\dfrac{72}{15}=14{,}1$ m.

c) La altura máxima alcanzada sería la ordenada del vértice de la parábola anterior, cuya abscisa sería $x=\dfrac{33}{2}=16{,}5$ por lo que la ordenada es 14,06 m.

d) Siguiendo con la parábola anterior, el delfín cae al agua aproximadamente en el mayor valor de x solución de la ecuación $-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{33}{2}x-54=0$, es decir $x=2{,}9$ segundos.

95. Una empresa se dedica a la fabricación de tapas metálicas para depósitos, cuyo coste depende, obviamente, del diámetro de la tapa. En la tabla de precios aparecen estos ejemplos:

Diámetro (cm)	115	155	205
Precio de la tapa (€)	46,80	66,70	102,5

Utilizando la interpolación cuadrática, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué precio tendrá una tapa de 170 cm de diámetro?

b) ¿Y de tres metros de diámetro?

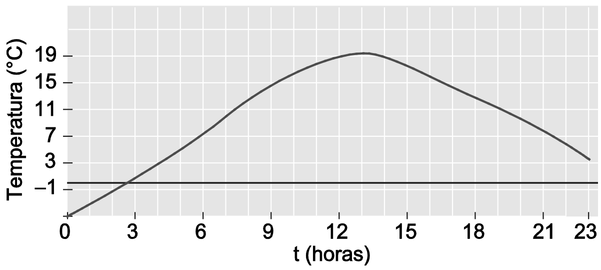
a) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (115; 46,8), (155; 66,7) y (205; 102,5) tiene por coeficientes la solución del sistema: $\begin{cases} 13\,225a + 115b + c = 46,8 \\ 24\,025a + 155b + c = 66,7 \\ 42\,025a + 205b + c = 102,5 \end{cases}$ que es $\begin{array}{l} a = 0,001\,86 \\ b = -0,0047 \\ c = 21,661 \end{array}$,

con lo que si x= 170 cm de diámetro, el precio de la tapa sería

y= 0,00186 · 170^2– 0,0047 · 170 + 21,661 = 74,616= 74,62€.

b) Si x = 300 cm, el precio de la tapa será: y = 0,00186 · 300^2– 0,0047 · 300 + 21,661 = 187,651 ≃ 187,65 €.

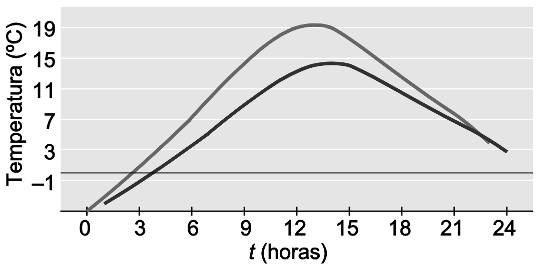
96. La gráfica representa la temperatura en el exterior de una nave industrial a lo largo de un día. Se ha observado que, debido al aislamiento, las temperaturas exteriores se suavizan en un 25 %, y las variaciones de la temperatura en el exterior son percibidas en el interior una hora después. Representa la gráfica de las temperaturas en el interior de la nave.



Que las temperaturas se suavicen un 25 % significa que la curva se contrae verticalmente al 75 %, es decir, que para una misma abscisa, la ordenada es el 75 % de la ordenada de la temperatura exterior.

Que las temperaturas se perciban una hora después significa que la gráfica se desplaza una unidad a la derecha, es decir, que la misma ordenada (temperatura) tiene la abscisa incrementada en una unidad.

La gráfica, por tanto, es la siguiente:



97. Las funciones "parte entera" y "parte decimal".

Como seguramente sabes, cualquier número real está entre dos enteros consecutivos; así, por ejemplo,

$1 \le 1,8 < 2$; $4 \le 4 < 5$; $-4 \le -\pi < -3$; ...

Si el número real x verifica $n \le x < n + 1$, siendo n un entero, se dice que n es la parte entera de x y se denota por $E(x) = n$.

a) Completa la siguiente tabla:

x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0,9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$												

b) Representa gráficamente los puntos obtenidos en la tabla anterior.

c) ¿Cuáles son todos los números x tales que $E(x) = 3$? ¿Y $E(x) = -1$?

d) Representa gráficamente la función $E(x)$ en el intervalo [–4, 3].

La función $D(x) = x - E(x)$ se llama parte decimal.

e) Calcula las imágenes por D de los números 1,7; 5 y –2,4.

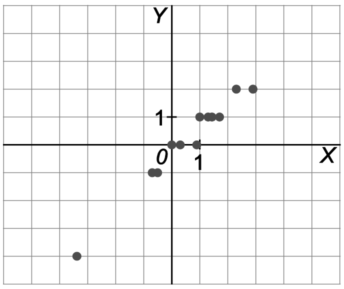
f) Escribe cinco números reales x tales que $D(x) = 0,4$.

g) Representa gráficamente la función $D(x)$ en el intervalo [–4, 3].

a)

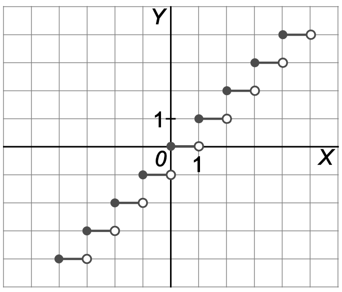
x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0´9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$	–4	–1	–1	0	0	0	1	1	1	1	2	2

b)



c) Si $E(x) = 3$, entonces $3 \le x < 4$. Si $E(x) = -1$, entonces $-1 \le x < 0$.

d)



e) $D(1,7) = 1,7 - E(1,7) = 1,7 - 1 = 0,7$. $D(5) = 5 - E(5) = 5 - 5 = 0$. $D(-2,4) = -2,4 - E(-2,4) = -2,4 - (-3) = 0,6$.

f) 0,4, 1,4, –0,6, –3,6, –5,6.

g) Si $-4 \le x < 3$, $D(x) = x - (-4) = x + 4$

Si $-3 \le x < -2$, $D(x) = x - (-3) = x + 3$

Si $-2 \le x < -1$, $D(x) = x - (-2) = x + 2$

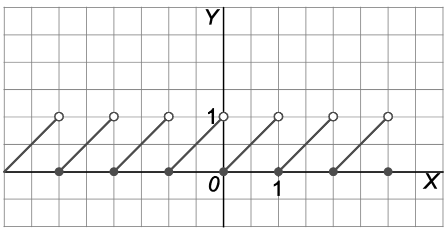
Si $-1 \le x < 0$, $D(x) = x - (-1) = x + 1$

Si $0 \le x < 1$, $D(x) = x$

Si $1 \le x < 2$, $D(x) = x - 1$

Si $2 \le x < 3$, $D(x) = x - 2$

Si $x = 3$, $D(x) = 3 - 3 = 0$



ENTORNO MATEMÁTICO

El “ratón inteligente”

Alicia es una emprendedora. Cuando terminó sus estudios de informática y marketing decidió montar un negocio que estuviera “a la última” y que fuera muy atractivo para los consumidores. Así surgió “El ratón inteligente”, una tienda de ordenadores y dispositivos móviles que incluye un rincón en dónde los clientes pueden probar los últimos productos del mercado mientras charlan tomando un refresco o un café.

Aunque el negocio va bien, la venta de portátiles está bajando y Alicia decide estudiar una nueva oferta que haga que las ventas se recuperen. El jueves a las siete de la tarde no había clientes y, ni corta ni perezosa, echa el cierre, pone el cartel de “Cerrado por trance intelectual de la dueña” y se pone a leer informes y reflexionar: “Ahora compro los portátiles a 500 € la unidad y los vendo a 800 €. Así, estoy vendiendo 40 unidades al mes. Los estudios de mercado que he leído parecen indicar que por cada 25€ que baje el precio del ordenador, las ventas podrían aumentar en 5 unidades“. Tras dos horas de leer papeles y reflexionar, Alicia se acomoda en el sillón y cierra losojos: “no tengo claro qué hacer”.
Mientras Alicia se recupera, vamos a intentar solucionar su problema. Para ello:

a) Escribe la función de ganancia mensual que tendrá Alicia en función del precio de venta de cada portátil. (AYUDA: llama *x* al número de veces que disminuye 25 € el precio de venta)

b) Calcula el precio ideal de venta para maximizar la ganancia y el precio para el que la ganancia no cambiaría respecto de la actual.

a) El precio de venta de cada portátil es $V = 800 - 25x$.

El precio de compra de cada portátil es $C = 500$.

El número de unidades vendidas es $N = 40 + 5x$.

Por tanto la función *f*(*x*)que expresa la ganancia mensual *G* será $f(x) = N(V - C)$ por lo que:

$$f(x) = (40 + 5x)\left[(800 - 25x) - 500\right] = -125x^2 + 500x + 12000$$

b) En la siguiente tabla se observa que el precio ideal de venta es de $V = 750$ €, pues es donde la ganancia es máxima: $G = 12\,500$ €; y que para un precio de venta de $V = 700$ €, la ganancia es la misma que la actual de $G = 120\,00$€.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C	500	500	500	500	500	500	500	500	500
V	800	775	750	725	700	675	650	625	600
N	40	45	50	55	60	65	70	75	80
G	12 000	12 375	12 500	12 375	12 000	11 375	10 500	9375	8000

El cerrajero

Los padres de Mario se han ido unos días fuera y, aunque su madre no las tenía todas consigo "tiene 16 años pero a veces actúa como si tuviera 10" su padre le apoyó y, al final, le han dejado solo en la casa. El viernes, Mario quedó con los colegas del instituto para jugar un partido por la tarde. Cuando llega a casa a eso de las 8, muerto de hambre y deseando darse una buena ducha se da de bruces con la cruda realidad: "¡He olvidado las llaves dentro de casa!" Tras unos minutos de pánico, se tranquiliza e intenta recordar si alguien tiene llaves, baja al portal y allí se encuentra con la solución a su grave problema: dos anuncios de cerrajeros que decían así:

> *Abroya*
>
> 25 € por reparación más 16 por cada cuarto de hora de trabajo.
>
> Rapidez y garantía.

> *Cobropoco*
>
> 31 € por reparación más 14 por cada cuarto de hora de trabajo.
>
> Eficacia y sorpresa garantizada.

Al leer los anuncios, Mario vuelve a entrar en fase pánico: las matemáticas nunca han sido lo suyo. Se sienta en el suelo y empieza a pensar qué oferta será mejor.

¿Puedes ayudar a Mario y hacer un estudio que decida con claridad a partir de cuántos minutos de trabajo es más económico uno u otro cerrajero?

a) Escribe la función que da el precio de cada cerrajero en función de los minutos de trabajo.

b) Calcula el tiempo en minutos para el que el precio de ambos cerrajeros es el mismo.

c) Si el trabajo dura media hora, ¿cuál es la opción más económica? ¿Y si fuera necesaria una hora?

a) El precio por minuto de la empresa *Abroya* es $f(x)=25+\frac{16}{15}x$, siendo x el número de minutos, y el de la empresa *Cobropoco* es $g(x)=31+\frac{14}{15}x$.

b) El precio de ambos cerrajeros será el mismo para aquel valor de x que verifique que $f(x)=g(x)$, es decir: $25+\frac{16}{15}x=31+\frac{14}{15}x$, cuya solución es $x=45$, por tanto, el precio coincidirá a los tres cuartos de hora.

c) $f(30)=25+\frac{16}{15}30=57$, $g(30)=31+\frac{14}{15}30=59$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura media hora, es la de la empresa *Abroya* que cobraría 57€.

$f(60)=25+\frac{16}{15}60=89$, $g(60)=31+\frac{14}{15}60=87$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura una hora, es la de la empresa *Cobropoco* que cobraría 87€.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Si la función $y = f(x)$ está definida solamente en el intervalo $[0, 4]$ y la función $y = g(x)$ está definida solamente en el intervalo $[1, 7]$, ¿para qué números reales puedes asegurar que existe $f(x) + g(x)$?

Deben existir $f(x)$ y $g(x)$ en los mismos valores, así que $x \in [0, 4] \cap [1, 7] = [1, 4]$.

2. Dadas las funciones $f(x)=5x^2-3x$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$ halla la expresión y el dominio de $f \circ g$, $g \circ f$ y $\frac{g}{f}$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = 5(x-1) - 3\sqrt{x-1}$.

$D(f \circ g) = [1, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2 - 3x) = \sqrt{5x^2 - 3x - 1}$.

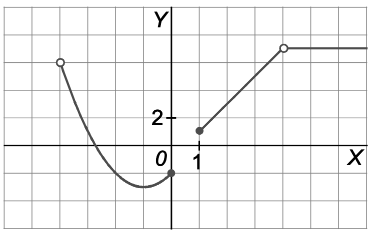
Como $D(f) = \mathbb{R}$, x estará en $D(g \circ f)$ si $5x^2 - 3x - 1 \geq 0$, por lo que

$D(g \circ f) = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{3-\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

$\left(\frac{g}{f}\right)x = \frac{\sqrt{x-1}}{5x^2-3x}$.

$D\left(\frac{g}{f}\right) = [1, \infty) - \left\{0, \frac{3}{5}\right\} = [1, \infty)$.

3. Observa la siguiente gráfica y determina el dominio y el recorrido de la función representada:



$D(f) = (-4, 0] \cup [1, 4) \cup (4 + \infty)$ $R(x) = [-3; 7]$

4. Escribe como una función definida a trozos $f(x) = |x^2 - 1|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5. Calcula la función inversa de $f(x)=\frac{x+5}{x-1}$.

$y=\frac{x+5}{x-1}$; se despeja x: $x=\frac{5+y}{y-1}$, así que $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{x-1}$.

6. A partir de $f(x)=x^2-4x+1$, halla la expresión de las funciones cuya gráfica, respecto de la de *f*:

a) Está desplazada dos unidades hacia arriba.

b) Está desplazada tres unidades hacia la izquierda.

c) Se ha dilatado verticalmente en un factor 2.

d) Se ha comprimido horizontalmente en un factor 2.

a) $g(x)=f(x)+2=x^2-4x+3$

b) $g(x)=f(x+3)=(x+3)^2-4(x+3)+1=x^2+2x-2$

c) $g(x)=2f(x)=2x^2-8x+2$

d) $g(x)=f(2x)=4x^2-8x+1$

7. Utilizando la interpolación lineal, obtén aproximadamente $\sqrt{29}$ sin utilizar la calculadora.

Tomando como datos $\sqrt{25}=5$ y $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{29}=5+h$ siendo $\frac{h}{29-25}=\frac{6-5}{36-25}$, es decir $h=\frac{4}{11}$,

por lo que $\sqrt{29}\simeq 5+\frac{4}{11}=\frac{59}{11}\simeq 5{,}36$. La calculadora nos da un valor de 5,385…

8. Determina la función cuadrática que pasa por los puntos A(1, 0), B(2, −4) y C(4, 0).

$y=ax^2+bx+c$. Si la parábola pasa por (1, 0) y (4, 0) la abscisa del vértice es $x=\frac{5}{2}$, por lo que dicha parábola será $y=p\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+k$. Al pasar por (1, 0), $0=\frac{9}{4}p+k$ y al pasar por (2, –4), $-4=\frac{p}{4}+k$, con lo que, restando

$4=2p$, y por tanto $p=2$, $k=-\frac{9}{2}$ y la parábola es $y=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$, es decir $y=2x^2-10x+8$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados

1. ¿Qué verifican las funciones *f* y *g* dadas por $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **y** $g(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x\le 0 \\ -3 & \text{si } x>0 \end{cases}$**?**

A. Sus gráficas se cortan en los puntos de abscisas 1 y 2.
B. Sus gráficas no tienen ningún punto en común.
C. Las gráficas de g y $\dfrac{f}{g}$ son paralelas.
D. $f(x)\cdot g(x) < 0$ si x >0.

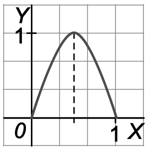
A. Es falso, pues $f(1) = -1$ y $g(1) = -3$.

B. Es verdadero, ya que si $x \le 0$, $x^2 - 1 = 3x - 3$ tiene por soluciones 1 y 2, ninguna menor o igual que cero y si $x > 0$, tampoco se cortan pues $-1 \ne -3$.

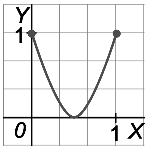
C. Es falso pues si $x \le 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-1}{3x-3} = \dfrac{x+1}{3}$, recta que no es paralela a $y = 3x - 3$.

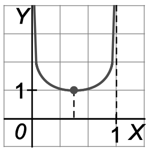
D. Es falso pues $(-1)(-3) > 0$.

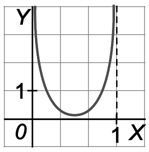
2. Si la gráfica de *f*(*x*) en [0, 1] es

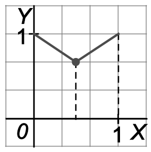


la de $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ **podría ser:**

A.


B.


C.


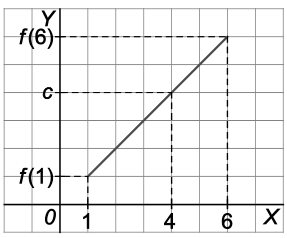
D.


Como $g(0)$ y $g(1)$ no existen, se descartan las respuestas A) y D). Finalmente, como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$, se descarta la respuesta C) La respuesta correcta es la B.

3. Por interpolación lineal de la función *y*=*f*(*x*) en el intervalo [1, 6], se obtiene el valor *c* para *x* = 4, entonces:

A. $2(c - f(1)) = 3(f(6) - c)$ **B.** $\dfrac{c-f(1)}{3} < \dfrac{f(6)-c}{2}$ **C.** $\dfrac{c-f(1)}{3} > \dfrac{f(6)-c}{2}$ **D.** $c = f(4)$

Si interpretamos los datos del enunciado en la siguiente gráfica:



Se deduce que $\dfrac{c-f(1)}{3} = \dfrac{f(6)-c}{2}$, es decir $2(c - f(1)) = 3(f(6) - c)$. La respuesta correcta es la A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Para la función inversa de $f(x) = x^3$, se verifica:

A. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ **B.** $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^3}$ **C.** $f^{-1}(-8)=-2$ **D.** $f^{-1}(x)$ no es una función.

Si $y=x^3$, $x=\sqrt[3]{y}$, por lo que la inversa será $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, y una respuesta correcta es A.

Como $f^{-1}(-8)=\sqrt[3]{-8}=-2$ también se verifica C.

5. Sea $f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ y $g(x) = cx + d$ con $c \neq 0$. Si $f \circ g = g$, entonces se verifica que:

A. $a = 1$ **B.** $b = 0$ **C.** $a = 1$ y $b = 0$ **D.** $a = c$ y $b = d$

$(f \circ g)(x) = g(x)$ nos lleva a $f(cx + d) = cx + d$, es decir, $a(cx + d) + b = cx + d$, $acx + ad + b = cx + d$, por lo que

$ac = c$, $ad + b = d$. Como $c \neq 0$, $a = 1$ y $b = 0$, una respuesta correcta es C.

También se verifican las respuestas A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean f y g funciones con dominio todo $\mathbb{R}$ con $g(x) \geq 0$ para cualquier valor de x. Entonces si:

1) $f(x) \geq g(x)$ **para todo** x **2)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ **C.** $1 \Leftrightarrow 2$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ **D.** 1 y 2 se excluyen entre sí.

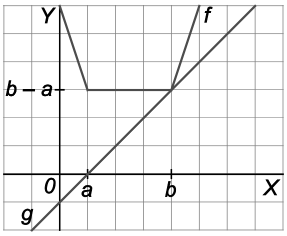
Si $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, por lo que $1 \Rightarrow 2$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, al ser $g(x) \geq 0$, es $f(x) \geq g(x)$, con lo que $2 \Rightarrow 1$ y la respuesta correcta es la C.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. Sean a y b números positivos con $a<b$. Para hallar el número de puntos de corte entre las gráficas de $f(x)=|x-a|+|x-b|$ y $g(x) = x - a$, nos dan los siguientes datos:

1. Valor de a **2. Valor de b**

A. Podemos prescindir de 1 pero no de 2.
B. Podemos prescindir de 2 pero no de 1.
C. Podemos prescindir de 1 y de 2.
D. No podemos prescindir ni de 1 ni de 2.



Dibujemos las gráficas de ambas funciones:

$$f(x)=\begin{cases} a-x+b-x=-2x+(a+b) & \text{si} \quad x<a \\ x-a+b-x=b-a & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ x-a+x-b=2x-(a+b) & \text{si} \quad b<x \end{cases}$$

El número de puntos de corte de ambas gráficas es 1, independientemente del valor de a y de b (con $0 < a < b$), por lo que la respuesta correcta es la C.