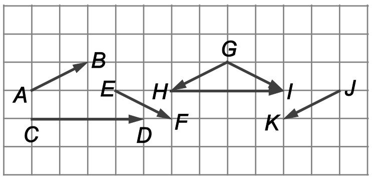
4 Vectores

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. **a)** Indica tres parejas de vectores equipolentes.

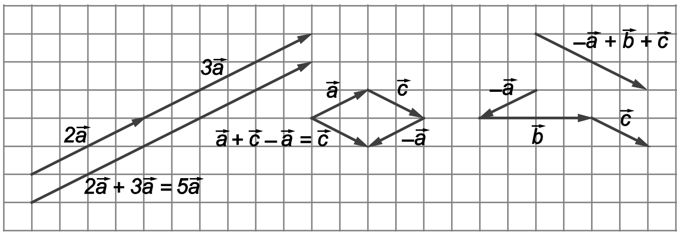
b) Representa: $-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$



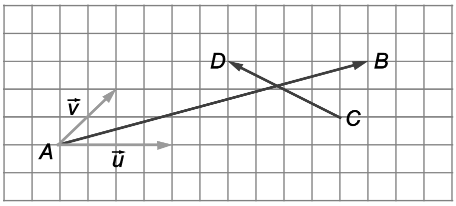
a) Son equipolentes las parejas: $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HI}$

b) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores libres cuyos representantes son $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ respectivamente. Tenemos

$-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



3. Expresa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

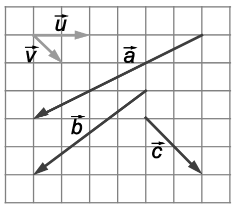


$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\dfrac{3}{2}\vec{v}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{3}{2}\vec{u}+\vec{v}$

4. Ejercicio resuelto.

5. **a)** Halla las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

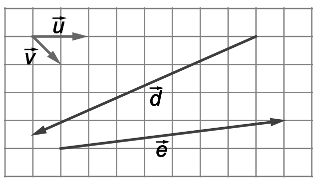
b) Representa y calcula las coordenadas de los vectores $\vec{d}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}$.



a) $\vec{a}=-\dfrac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{b}=-\dfrac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{c}=2\vec{v}$

b) $\vec{d}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)+\left(-\dfrac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=-\dfrac{23}{4}\vec{u}+\dfrac{7}{2}\vec{v}=\left(-\dfrac{23}{4},\dfrac{9}{2}\right)$

$\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}=2\vec{v}-\left(-\dfrac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=\dfrac{9}{2}\vec{u}-\vec{v}=\left(\dfrac{9}{2},-1\right)$



6. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(3,6)$ forman una base de V^2.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=\left(6,-\dfrac{11}{2}\right)$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

a) $\dfrac{2}{3}\neq\dfrac{-3}{6}\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

b) $\left(6,-\dfrac{11}{2}\right)=a\cdot(2,-3)+b\cdot(3,6)\Rightarrow\begin{cases}2a+3b=6\\ -3a+6b=-\dfrac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{1}{3}$

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ son $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

7 a 10. **Ejercicios resueltos.**

11. **Halla el punto medio del segmento comprendido entre los puntos *A*(7, 12) y *B*(33, –10).**

$$M\left(\frac{7+33}{2},\frac{12-10}{2}\right)=M(20,1)$$

12. **Comprueba si los puntos *P*, *Q* y *R* están alineados o forman triángulo en los siguientes casos:**

a) $P(0,3)$, $Q(1,1)$ y $R(2,-1)$ **b)** $P(-3,0)$, $Q(2,1)$ y $R(6,2)$ **c)** $P(-1,0)$, $Q\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ y $R\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(1,1)-(0,3)=(1,-2)\\ \overrightarrow{PR}=(2,-1)-(0,3)=(2,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(2,1)-(-3,0)=(5,1)\\ \overrightarrow{PR}=(6,2)-(-3,0)=(9,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{5}{9}\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow P, Q$ y R no están alineados, forman un triángulo.

c) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}\right)-(-1,0)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)\\ \overrightarrow{PR}=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)-(-1,0)=\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

13. **Calcula los valores de *a* y *b* para que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean equipolentes sabiendo que: *P*(*a* + 4, –*b*), Q(*a* + 1, *b*), *R*(4, –1) y *S*(*a*, *b*).**

$$\overrightarrow{PQ}\approx\overrightarrow{RS}\Rightarrow(a+1-a-4,\ b+b)=(a-4,\ b+1)\Rightarrow\begin{cases}-3=a-4\\ 2b=b+1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=1$$

14. **Calcula el valor de *k* para que los puntos *A*(4, –1), *B*(–1, 2) y *C*(*k*, *k* + 1) estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1-4,\ 2+1)=(-5,3)\\ \overrightarrow{AC}=(k-4,\ k+1+1)=(k-4,\ k+2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-5}{k-4}=\frac{3}{k+2}\Rightarrow-5k-10=3k-12\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

15. Halla el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* si *A*(2, 3), *B*(1, –1) y *C*(–3, 0).

Para que *ABCD* sea un paralelogramo basta con que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean equipolentes, por tanto, si $D(d_1, d_2)$ tenemos:

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -4) = (-3-d_1, -d_2) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3 - d_1 \\ -4 = -d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = -2,\ d_2 = 4 \Rightarrow D(-2, 4)$$

16. Ejercicio resuelto.

17. Si $\vec{u} = (-4, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, halla: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

18. Calcula, en función de *k*, el módulo de $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ y su producto escalar.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{2k^2 + 2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 = k(k+1) - k(k-1) = 2k$$

19. Calcula los valores de *k* para que el ángulo formado por $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ sea de 45º.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2k}{|k|\sqrt{2} \cdot \sqrt{2k^2+2}} = \frac{2k}{|2k|\sqrt{k^2+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sqrt{2k^2+2} = \pm 2 \Rightarrow 2k^2 + 2 = 4 \Rightarrow k = 1,\ k = -1$$

Si $k = 1$, $\alpha = 45^\circ$; si $k = -1$, $\alpha = 135^\circ$

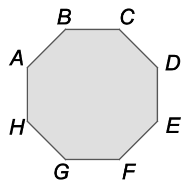
20. Ejercicio interactivo.

21 a 34. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Vectores fijos y vectores libres en el plano

35. La siguiente figura representa un octógono regular.



a) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono.

b) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices no consecutivos del octógono.

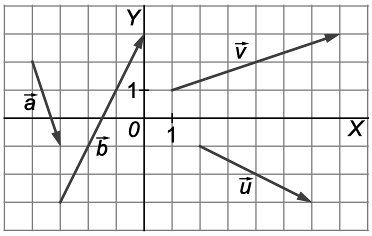
c) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono y tales que tengan el mismo módulo y la misma dirección pero diferente sentido.

d) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan el mismo módulo y diferente dirección.

e) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan diferente módulo igual dirección y diferente sentido.

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{GE}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EH}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ **e)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DG}$

36. Expresa los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

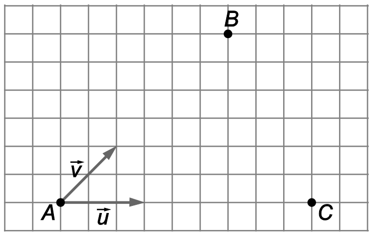


Respecto de la base canónica tenemos: $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (3, 6)$, $\vec{u} = (4, -2)$ y $\vec{v} = (6, 2)$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4a_1 + 6a_2 \\ -3 = -2a_1 + 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{u} + b_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 4b_1 + 6b_2 \\ 6 = -2b_1 + 2b_2 \end{cases} \Rightarrow b_1 = -\frac{3}{2},\ b_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

37. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 3\vec{v} \text{ y } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -3\vec{u} + 3\vec{v}$$

Dependencia lineal

38. Decide si las siguientes parejas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de V^2?

a) $\vec{u} = (-4, 2)$ y $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\vec{u} = (16, 32)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\vec{u} = (2, -16)$ y $\vec{v} = (-1, -8)$

a) $\dfrac{-4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{-\frac{1}{3}} = -6 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

b) $\dfrac{16}{-\frac{1}{4}} = \dfrac{32}{-\frac{1}{2}} = -64 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

c) $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{-16}{-8} \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

39. Expresa, en cada caso, el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{a} = (-12, -2)$, $\vec{u} = (4, -3)$ y $\vec{v} = (-1, -2)$

b) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, -5\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $\vec{v} = (1, -2)$

c) $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{6}\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{6}\right)$

a) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -12 = 4a_1 - a_2 \\ -2 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 4 \Rightarrow \vec{a} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$

b) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_1 + a_2 \\ -5 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3,\ a_2 = -2 \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{5}{6}a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 1 \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$

Operaciones con coordenadas

40. Realiza las siguientes operaciones con coordenadas de vectores.

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

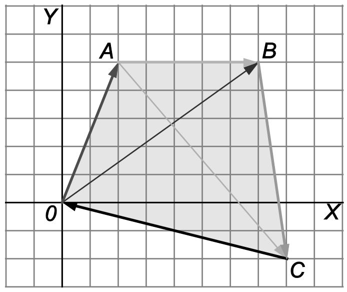
c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)=2(40, -21)-(3, -6)=(77, -36)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)=\left(0, -\frac{11}{20}\right)$

c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right)-(4, -6)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{6}, \frac{69}{10}\right)$

41. En la siguiente figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores libres de representantes: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$ es el vector nulo.

c) Calcula las coordenadas de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

$A(2, 5)$, $B(7, 5)$, $C(8, -2)$ y $O(0, 0)$, por tanto:

a) $\overrightarrow{OA}=(2, 5)$, $\overrightarrow{AB}=(5, 0)$, $\overrightarrow{BC}=(1, -7)$, $\overrightarrow{CO}=(-8, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(7, 5)$ y $\overrightarrow{AC}=(6, -7)$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=(2, 5)+(5, 0)+(1, -7)+(-8, 2)=(0, 0)$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2, 5)+(5, 0)=(7, 5)$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=(2, 5)+2(5, 0)-3(1, -7)=(9, 26)$

42. Calcula las coordenadas del origen *A* de un vector cuyo extremo es *B*(–2, 4) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(5, –1) y *D*(–2, –2).

$\overrightarrow{CD}=(-7, -1)$, si $A(a_1, a_2)$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(-2-a_1, 4-a_2)=(-7, -1)\Rightarrow\begin{cases}-2-a_1=-7\\4-a_2=-1\end{cases}\Rightarrow a_1=5,\ a_2=5\Rightarrow A(5, 5)$

43. Dados los puntos *A*(–1, 4), *B*(2, 2) y *C*(–3, 5), calcula:

a) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

b) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$

c) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

d) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(d_1+3, d_2-5)\Rightarrow\begin{cases}d_1+3=3\\d_2-5=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=0\\d_2=3\end{cases}\Rightarrow D(0, 3)$

b) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(-2, 1)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=-2\\2-d_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=4\\d_2=1\end{cases}\Rightarrow D(4, 1)$

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(3d_1+9, 3d_2-15)\Rightarrow\begin{cases}3d_1+9=3\\3d_2-15=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(-2, \frac{13}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(4, -2)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=4\\2-d_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=4\end{cases}\Rightarrow D(-2, 4)$

44. Dados los puntos *A*(2, –3), *B*(1, –4) y *C*(–1, –2), calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v}$

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = (-2, -2) + (-9, 3) + (-2, 2) = (-13, 3)$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \left(2, -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = (4, -2)$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-26, 6) + (2, -1) = (-24, 5)$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (-39, 9) + (8, -4) = (-31, 5)$

45. Calcula, si es que existe, el valor de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(2, -3+k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3)$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3-k)$

c) $\left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3)$

a) $(2, -3+k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3) \Rightarrow (2, -3+k) = (2, -24) \Rightarrow -3 + k = -24 \Rightarrow k = -21$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3-k) \Rightarrow (1, -6) = (4k-3, -1+3k) \Rightarrow \begin{cases} 4k - 3 = 1 \Rightarrow k = 1 \\ -1 + 3k = -6 \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$ No existe ningún valor de *k* para el que se cumpla la igualdad.

c) $\left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3) \Rightarrow \left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} + 2k, 2k - 3k\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} + k = \frac{2}{3} + 2k \\ \frac{k}{2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0$

46. Calcula los valores de *x* y de *y* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y)$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3)$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y)$

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y) \Rightarrow \begin{cases} 13 = 5x + 3 \\ -8 = -5 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 4y \\ y = 2 + 2x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 2 \\ -2x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = x + 3x \\ \frac{y}{4} = -\frac{x}{4} + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

47. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) $\vec{u}=(3,\ 3)$ **c)** $\vec{u}=(-20,\ -21)$ **e)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\ -4\right)$

b) $\vec{u}=(12,\ -5)$ **d)** $\vec{u}=\left(3,\ -\sqrt{3}\right)$ **f)** $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}=(3,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al primer cuadrante.

b) $\vec{u}=(12,\ -5)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{5}{12}\right)=5{,}89\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

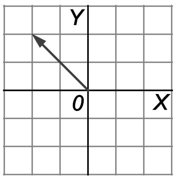
c) $\vec{u}=(-20,\ -21)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(-20)^2+(-21)^2}=\sqrt{841}=29\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{21}{20}\right)=3{,}95\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

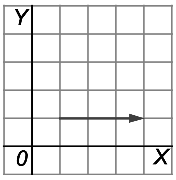
d) $\vec{u}=\left(3,\ -\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{11\pi}{6}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

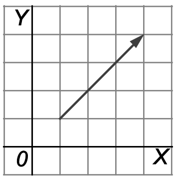
e) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\ -4\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{\dfrac{65}{4}}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}(-8)=4{,}84\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

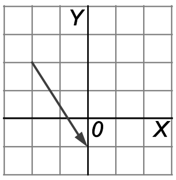
f) $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2\\ \arg(\vec{u})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

48. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a)


b)


c)


d)


a) $\vec{a}=(-2,\ 2)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \arg(\vec{a})=\operatorname{arctg}(-1)=\dfrac{3\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

b) $\vec{b}=(3,\ 0)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{b}|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3\\ \arg(\vec{b})=\operatorname{arctg}0=0\text{ rad}\end{cases}$

c) $\vec{c}=(3,\ 3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{c}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{c})=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

d) $\vec{d}=(2,\ -3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{d}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}\\ \arg(\vec{d})=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=5{,}3\text{ rad}\end{cases}$

49. Calcula los lados de los triángulos *ABC* en cada caso.

a) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ y $C(-1, -1)$ **b)** $A(3, -1)$, $B(-2, 3)$ y $C(5, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, -6)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6,\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 6)$ y $\overrightarrow{BC} = (7, 2)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

50. Clasifica los siguientes triángulos, de los que conocemos sus vértices, según sus lados.

a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$ **c)** $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Es un triángulo isósceles.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

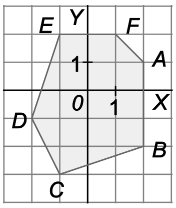
Es un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \sqrt{10},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10}$$

Es un triángulo equilátero.

51. Calcula la medida de los lados del hexágono de la figura.



$A(2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(-1, -3)$, $D(-2, -1)$, $E(-1, 2)$ y $F(1, 2)$, por tanto:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0+9} = 3$ $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{4+0} = 2$ $\left|\overrightarrow{FA}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Producto escalar

52. Calcula el producto escalar de:

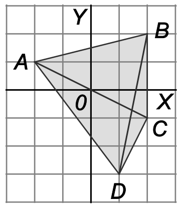
a) $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ **b)** $\vec{u} = (-2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ **c)** $\vec{u} = (-3, -4)$ y $\vec{v} = (2, 0)$ **d)** $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (1, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 20 = 26$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 4 = -8$ **c)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6$ **d)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 9 = -10$

53. Halla el módulo de la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -4)$.

$$\left|\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}\right| = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

54. Calcula los productos escalares que se indican, si los vectores vienen determinados por la figura.



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}$ **d)** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,\,1)\cdot(0,\,-3)=0-3=-3$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA}=(-1,\,-2)\cdot(-4,\,-1)=4+2=6$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=(4,\,-2)\cdot(-3,\,4)=-12-8=-20$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(4,\,-2)\cdot(1,\,5)=4-10=-6$

55. Calcula el valor o los valores de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

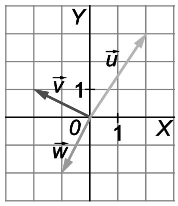
a) $(2,\,k)\cdot(-1,\,3)=-2$ **b)** $(3,\,-k)\cdot(2,\,-1)=4k$ **c)** $\left(5,\,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,\,-k)=6k$

a) $(2,\,k)\cdot(-1,\,3)=-2\Rightarrow -2+3k=-2\Rightarrow k=0$

b) $(3,\,-k)\cdot(2,\,-1)=4k\Rightarrow 6+k=4k\Rightarrow k=2$

c) $\left(5,\,-\frac{k}{2}\right)\cdot(k,\,-k)=6k\Rightarrow 5k+\frac{k^2}{2}=6k\Rightarrow k^2-2k=0\Rightarrow k(k-2)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\k=2\end{cases}$

56. Dados los vectores de la figura, resuelve las operaciones que se indican.



a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$

c) $\vec{v}\cdot(2\vec{u}-3\vec{w})+(-3\vec{w}+2\vec{u})\cdot\vec{v}$

$\vec{u}=(2,\,3)$, $\vec{v}=(-2,\,1)$ y $\vec{w}=(-1,\,-2)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=-1-8=-9$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(2,\,3)\cdot(-3,\,-1)+(0,\,4)\cdot(-1,\,-2)=-9-8=-17$

c) $\vec{v}\cdot(2\vec{u}-3\vec{w})+(-3\vec{w}+2\vec{u})\cdot\vec{v}=(-2,\,1)\cdot(7,\,12)+(7,\,12)\cdot(-2,\,1)=-2-2=-4$

Vectores paralelos y vectores perpendiculares

57. **a)** Escribe todos los vectores paralelos al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,\,-3)$.

b) Escribe todos los vectores perpendiculares al vector libre de coordenadas $\vec{u}=(2,\,-3)$.

c) Halla un vector paralelo a $\vec{u}=(2,\,-3)$ y unitario.

d) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,\,-3)$ y unitario.

a) $(2t,\,-3t)$ con $t\in\mathbb{R}$

b) $(3t,\,2t)$ con $t\in\mathbb{R}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\,\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\,\frac{-3\sqrt{13}}{13}\right)$

d) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\,\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{13}}{13},\,\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

58. Para cada caso, calcula todos los vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector $\vec{u}$. ¿Cuáles de ellos tienen también el mismo sentido?

a) $\vec{u}=(10,-24)$ **b)** $\vec{u}=(-2{,}7;-3{,}6)$ **c)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},4\right)$

a) $$\vec{u}=(10,-24)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}},\dfrac{-24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right)=\left(\dfrac{10}{26},\dfrac{-24}{26}\right)=\left(\dfrac{5}{13},\dfrac{-12}{13}\right)\\ \left(\dfrac{-10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}},\dfrac{24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right)=\left(\dfrac{-10}{26},\dfrac{24}{26}\right)=\left(\dfrac{-5}{13},\dfrac{12}{13}\right)\end{cases}$$

El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

b) $$\vec{u}=(-2{,}7;-3{,}6)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{-2{,}7}{4{,}5};\dfrac{-3{,}6}{4{,}5}\right)=(-0{,}6;-0{,}8)\\ \left(\dfrac{2{,}7}{4{,}5};\dfrac{3{,}6}{4{,}5}\right)=(0{,}6;0{,}8)\end{cases}$$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

c) $$\vec{u}=\left(\frac{1}{2},4\right)\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}},\dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{65}},\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right)\\ \left(-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}},-\dfrac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{65}},-\dfrac{8}{\sqrt{65}}\right)\end{cases}$$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

59. Calcula las coordenadas de un vector paralelo al $\overrightarrow{AF}$ y de módulo 10, siendo *A*(–1, 3) y *F*(–4, 7).

$\overrightarrow{AF}=(-3,4)$, los vectores paralelos a $\overrightarrow{AF}$ son de la forma $(-3t,4t)$ con $t\in\mathbb{R}$. Así: $|(-3t,4t)|=10\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{9t^2+16t^2}=10\Rightarrow 5|t|=10\Rightarrow t=\pm2$. Por tanto, existen dos posibles soluciones: $(-6,8)$ y $(6,-8)$.

60. Determina un vector perpendicular a $\vec{u}=(-5,12)$ y que tenga el mismo módulo que $\vec{u}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y con su mismo módulo: $(12,5)$ y $(-12,-5)$.

Ángulo de dos vectores

61. Calcula el ángulo que forman en cada caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(5,12)$ **c)** $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(1,-2)$ **e)** $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(1,2)$

b) $\vec{u}=(20,-21)$ y $\vec{v}=(-1,1)$ **d)** $\vec{u}=(1,-1)$ y $\vec{v}=(2,2)$ **f)** $\vec{u}=(0,2)$ y $\vec{v}=(3,-1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{63}{\sqrt{25}\sqrt{169}}=\dfrac{63}{65}\Rightarrow\alpha=14{,}25^\circ$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-41}{\sqrt{841}\sqrt{2}}=-\dfrac{41}{29\sqrt{2}}=-\dfrac{41\sqrt{2}}{58}\Rightarrow\alpha=178{,}6^\circ$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-1\Rightarrow\alpha=180^\circ$

d) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{8}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

e) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

f) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{10}}=-\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=108{,}43^\circ$

62. Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}=(m,1)$ y $\vec{v}=(-2,3)$ forman un ángulo de:

a) 30º **b)** 135º **c)** 90º **d)** 0º

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{13}}=\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}$

a) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow -4m+6=\sqrt{39m+39}\Rightarrow 16m^2+36-48m=39m+39\Rightarrow 16m^2-87m-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{87+\sqrt{7761}}{32}$ (Falsa), $m=\dfrac{87-\sqrt{7761}}{32}$

b) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 4m-6=\sqrt{26m+26}\Rightarrow 16m^2+36-48m=26m+26\Rightarrow 16m^2-74m+10=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{37+\sqrt{1209}}{16}$, $m=\dfrac{37-\sqrt{1209}}{16}$ (Falsa)

c) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=0\Rightarrow -2m+3=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=1\Rightarrow -2m+3=\sqrt{13m+13}\Rightarrow 4m^2+9-12m=13m+13\Rightarrow 4m^2-25m-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{25+\sqrt{689}}{8}$ (Falsa), $m=\dfrac{25-\sqrt{689}}{8}$

63. Calcula los ángulos del triángulo de vértices *ABC*.

a) $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(4, 1)$ **b)** $A(3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 3)$

a) $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{A}=29{,}74^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(-1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,0)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=116{,}57^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-3,2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-2,0)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \hat{C}=33{,}69^\circ$

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{A}=63{,}43^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(3,-4)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{20}{10\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=26{,}57^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-1,-2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=0\Rightarrow \hat{C}=90^\circ$

64. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos.

a) $A(1, 3)$, $B(3, 0)$ y $C(-2, 1)$ **b)** $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(2, -1)$ **c)** $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(4, 0)$

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-2)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow \hat{A}=90^\circ$. Triángulo rectángulo en *A*.

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-4)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}=\dfrac{5\sqrt{221}}{221}\Rightarrow \hat{A}=70{,}35^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(3,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2)\Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{8}{2\sqrt{65}}=\dfrac{4\sqrt{65}}{65}\Rightarrow \hat{B}=60{,}26^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-1,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2)\Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{12}{2\sqrt{85}}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85}\Rightarrow \hat{C}=49{,}4^\circ$

Triángulo acutángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-3)\Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-3}{3\sqrt{26}}=-\dfrac{\sqrt{26}}{26}\Rightarrow \hat{A}=101{,}31^\circ$. Triángulo obtusángulo.

65. Calcula los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son *A*(2, 2), *B*(2, 4), *C*(–1, 1) y *D*(–1, –1).

Observemos que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,2)$, por lo que se trata de un paralelogramo, con lo que $\hat{A}=\hat{C}$ y $\hat{B}=\hat{D}=180^\circ-\hat{A}$.

Por tanto: $\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{-6}{6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}=135^\circ$ y $\hat{B}=\hat{D}=45^\circ$.

Síntesis

66. Dados los vectores $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ y $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula:

a) Los módulos de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) El ángulo que forman los dos vectores.

d) Halla el módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) Compara los cocientes $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ y $\dfrac{|proy_{\vec{u}}\vec{v}|}{|proy_{\vec{v}}\vec{u}|}$.

f) Halla el ángulo que forman $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u}$.

g) Halla las coordenadas de $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad$ $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 6 \cdot (-4) + (-8) \cdot 3 = -48$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 163{,}74^\circ$

d) $|proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{48}{5} = 9{,}6$ $\quad$ $|proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{48}{10} = 4{,}8$

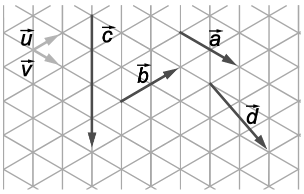
e) Son iguales: $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{proy_{\vec{u}}\vec{v}}{proy_{\vec{v}}\vec{u}} = 0{,}5$

f) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{52}{10\sqrt{29}} = \dfrac{26\sqrt{29}}{145} \Rightarrow \beta = 15{,}07^\circ$

g) Como α es obtuso, $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{v}$ y $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$. Así:

$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}| \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\dfrac{192}{25}, -\dfrac{144}{25}\right)$ $\quad$ $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}| \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(-\dfrac{288}{100}, \dfrac{384}{100}\right)$

67. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$\vec{a} = 2\vec{v}$ $\quad$ $\vec{b} = 2\vec{u}$ $\quad$ $\vec{c} = -4\vec{u} + 4\vec{v}$ $\quad$ $\vec{d} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

68. Halla un vector $\vec{v}$ de módulo 5 sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$, siendo $\vec{u} = (6, 8)$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, tenemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 6a + 8b = -14 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-7 - 4b}{3} \Rightarrow \left(\frac{-7 - 4b}{3}\right)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 + 56b - 176 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{44}{25},\ a = -\frac{117}{25} \\ b = -4,\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \left(-\frac{117}{25}, \frac{44}{25}\right) \\ \vec{v} = (3, -4) \end{cases}$$

69. Calcula el vértice *D* del paralelogramo *ABCD*, siendo *A*(–3, 4), *B*(–2, –4) y *C*(3, –2). Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

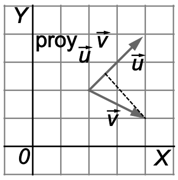
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Este punto de corte será, por tanto, el punto medio del segmento *AC*:

$$M\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = M(0,\ 1)$$

Si $D(d_1, d_2)$ es el cuarto vértice del paralelogramo, se deberá verificar que el punto medio del segmento *BD* es *M*:

$$\left(\frac{-2+d_1}{2}, \frac{-4+d_2}{2}\right) = (0,\ 1) \Rightarrow d_1 = 2,\ d_2 = 6 \Rightarrow D(2,\ 6)$$

70. Dados los vectores de la figura:



a) Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

b) Descompón $\vec{v}$ como suma de dos vectores: uno de igual dirección que $\vec{u}$ y otro perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{u} = (2,\ 2)$ y $\vec{u} = (2,\ -1)$

a) $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, por tanto:

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \left|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\right| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{2}{8}\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Todos los vectores que llevan la dirección de $\vec{u}$ son de la forma $(t,\ t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y todos los vectores que llevan la dirección perpendicular a $\vec{u}$ son de la forma $(-s,\ s)$ con $s \in \mathbb{R}$, por tanto, tenemos:

$$\vec{v} = (t,\ t) + (-s,\ s) \Rightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ t + s = -1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

71. Calcula el valor de *m* para que los puntos del plano *A*(1, 2), *B*(–2, m – 2) y *C*(3, –m) estén alineados.

$$\overrightarrow{AB} = (-3,\ m-4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (2,\ -m-2) \Rightarrow \frac{2}{-3} = \frac{-m-2}{m-4} \Rightarrow 2m - 8 = 3m + 6 \Rightarrow m = -14$$

72. Calcula las coordenadas del extremo *B* de un vector cuyo origen es *A*(2, 3) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(–2, 3) y *D*(0, –4).

Si $B(b_1,\ b_2)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (b_1 - 2,\ b_2 - 3) = (2,\ -7) \Rightarrow b_1 = 4,\ b_2 = -4 \Rightarrow B(4,\ -4)$

73. El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres medianas y está situado a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo *A*(–3, 3), *B*(2, 1), *C*(–2, –1).

El punto medio del lado *CB* es el origen: $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = O(0,\ 0)$, por tanto, si el baricentro es $G(g_1,\ g_2)$, tenemos:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GO} \Rightarrow (g_1 + 3,\ g_2 - 3) = 2\cdot(-g_1,\ -g_2) \Rightarrow \begin{cases} g_1 + 3 = -2g_1 \\ g_2 - 3 = -2g_2 \end{cases} \Rightarrow g_1 = -1,\ g_2 = 1 \Rightarrow G(-1,\ 1)$$

74. De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}|^2 = 13$, $|\vec{v}| = 10$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$.

a) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-9}{10\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 104{,}45º$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = -105$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 95$ $\quad$ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 131$

$\cos\beta = \dfrac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+\vec{v}||\vec{u}-\vec{v}|} = \dfrac{-105}{\sqrt{12445}} \Rightarrow \beta = 160{,}26º$

75. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31$ y $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37$. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 31$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 37$. Por tanto, $31 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 37 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

CUESTIONES

76. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El vector nulo es linealmente dependiente con cualquier otro vector del plano.

b) Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección entonces su producto escalar coincide con el producto de sus módulos.

c) $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

a) Verdadero. El vector nulo se puede escribir como el producto de cualquier vector por el número 0.

b) Falso. Solo es verdadero si tienen también el mismo sentido; si tienen diferente sentido el producto escalar es el producto de los módulos multiplicado por –1.

c) Falso. Si $\vec{u} = (1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1)$ entonces $|\vec{u}+\vec{v}| = |(1, 1)| = \sqrt{2}$ y $|\vec{u}| + |\vec{v}| = 1 + 1 = 2$

d) Verdadero. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

77. Da un ejemplo de tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean linealmente independientes, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean también linealmente independientes, pero $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2)$

78. Demuestra que si $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$ entonces los puntos *A* y *D* son el mismo.

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv D$

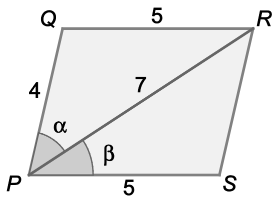
PROBLEMAS

79. El paralelogramo *PQRS* verifica que *PQ* = 4 cm, *PR* = 7 cm y *PS* = 5 cm.

a) Calcula $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR}$.

b) Calcula los ángulos del paralelogramo.

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos *PQR* y *PRS*:



$$\cos\alpha = \frac{16+49-25}{56} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44{,}42^{\circ}$$

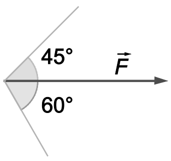
$$\cos\beta = \frac{25+49-16}{70} = \frac{29}{35} \Rightarrow \alpha = 34{,}05^{\circ}$$

a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 4\cdot 7\cdot\cos\alpha = 4\cdot 7\cdot\frac{5}{7} = 20$ $\qquad$ $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP} = 7\cdot 4\cdot\cos(\alpha+\beta) = 5{,}6$

$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 5\cdot 7\cdot\frac{29}{35} = 29$ $\qquad$ $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 29$

b) $\alpha+\beta = 78{,}47^{\circ}$ y $180^{\circ}-(\alpha+\beta) = 101{,}53^{\circ}$

80. Descompón una fuerza $\vec{F}$ de 15 Newton en otras dos que formen con ella ángulos de 45º y 60º.



$$\begin{cases}|\vec{F_2}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F}|^2 - 2\cdot|\vec{F_1}|\cdot|\vec{F}|\cdot\cos 45^{\circ}\\ |\vec{F_1}|^2 = |\vec{F_2}|^2 + |\vec{F}|^2 - 2\cdot|\vec{F_2}|\cdot|\vec{F}|\cdot\cos 60^{\circ}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|\vec{F_2}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot|\vec{F_1}|\\ |\vec{F_1}|^2 = |\vec{F_2}|^2 + 225 - 15\cdot|\vec{F_2}|\end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

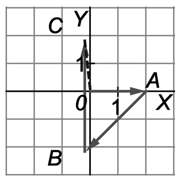
$$|\vec{F_2}|^2 = |\vec{F_2}|^2 + 225 - 15\cdot|\vec{F_2}| + 225 - 15\sqrt{2}\cdot|\vec{F_1}| \Rightarrow 15|\vec{F_2}| + 15\sqrt{2}|\vec{F_1}| = 450 \Rightarrow |\vec{F_2}| + \sqrt{2}|\vec{F_1}| = 30 \Rightarrow |\vec{F_2}| = 30 - \sqrt{2}|\vec{F_1}|$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\left(30-\sqrt{2}|\vec{F_1}|\right)^2 = |\vec{F_1}|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot|\vec{F_1}| \Rightarrow 900 + 2|\vec{F_1}|^2 - 60\sqrt{2}|\vec{F_1}| = |\vec{F_1}|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot|\vec{F_1}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{F_1}|^2 - 45\sqrt{2}|\vec{F_1}| + 675 = 0 \Rightarrow |\vec{F_1}| = \frac{45\sqrt{2}-15\sqrt{6}}{2} = 13{,}45\text{ N},\ |\vec{F_2}| = 30 - \sqrt{2}|\vec{F_1}| = 10{,}98\text{ N}$$

81. Jorge realiza una excursión en tres etapas. En la primera se dirige hacia el Este y anda 2 km. En la segunda sigue andando 3 km pero esta vez en dirección Sudoeste. Finalmente, anda 4 km en dirección Norte. ¿Qué distancia le separa del punto de partida al finalizar la excursión? Realiza, usando vectores, un esquema del trayecto seguido.

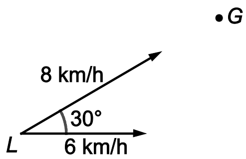


Si se considera el sistema de referencia de la figura, el trayecto de Jorge es $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$:

$$O(0,\,0),\ A(2,\,0),\ B(2+3\cos 225^{\circ},\,+3\,\text{sen}\,225^{\circ}) = \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\,\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } C\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\,\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

La distancia del punto de salida es, por tanto: $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{29-18\sqrt{2}} = 1{,}88$ km

82. Lola está paseando a su perra Lúa. En un momento dado, en el que se encuentran en el punto *L*, la perra ve un gato situado en *G* y tira hacia él con una velocidad de 8 km/h y con una dirección de 30º sobre la dirección de paseo, tal y como muestra la figura. Por su parte Lola tira con una velocidad de 6 km/h en la dirección de su paseo.



Calcula el vector velocidad resultante dando su módulo y dirección.

Tomando el sistema de referencia centrado en *L* y con ejes la dirección del paseo y su perpendicular, se pueden escribir vectorialmente las velocidades de Lola y Lúa como $\vec{a}=(6,\,0)$ y $\vec{b}=(8\cos 30º,\,8\,\text{sen}\,30º)=\left(4\sqrt{3},\,4\right)$, respectivamente.

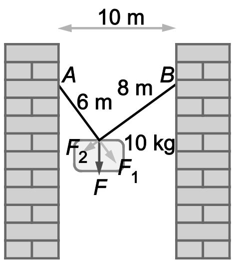
Por tanto, la velocidad resultante es $\vec{a}+\vec{b}=\left(6+4\sqrt{3},\,4\right)$, con módulo $\sqrt{\left(6+4\sqrt{3}\right)^2+16}=13{,}53$ km/h y dirección 17,19º respecto de la horizontal.

83. Los módulos de dos vectores valen 15 y 12 unidades de longitud respectivamente. El módulo de la suma de dichos vectores es 8 unidades de longitud. Calcula el producto escalar de los vectores y el ángulo que forman.

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2 \Rightarrow 64=225+2\vec{u}\cdot\vec{v}+144 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-152{,}5$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{-152{,}5}{15\cdot 12}=-0{,}8472 \Rightarrow \alpha=147{,}91º$$

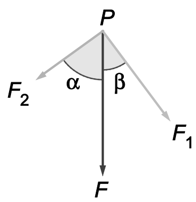
84. Una pesa está suspendida en una cuerda sujeta a dos puntos *A* y *B* de igual altura y ubicados en dos paredes que distan 10 m, tal y como muestra la figura.



La cuerda tiene una longitud de 14 m y la pesa está situada a 6 m de *A* y 8 m de *B*.

La masa de la pesa es de 10 kg y, por tanto, la fuerza que ejerce es *F* =98 N.

Calcula los valores de las fuerzas F_1 y F_2 en los que se descompone la fuerza *F*. ¿Qué interpretación puedes dar a estas fuerzas? Calcula los ángulos que forman con la fuerza *F*.



El triángulo *ABP* es rectángulo en *P* ya que $10^2=6^2+8^2$, por tanto:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ \text{tg}\,\beta=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ \text{sen}\,\alpha=\cos\beta=\frac{4}{5}\ \text{y}\ \cos\alpha=\text{sen}\,\beta=\frac{3}{5}$$

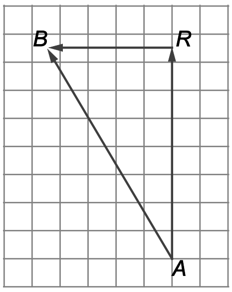
$$\left|\vec{F_1}\right|=98\cdot\cos\beta=98\cdot\frac{4}{5}=78{,}4\text{ N},\ \left|\vec{F_2}\right|=98\cdot\cos\alpha=98\cdot\frac{3}{5}=58{,}8\text{ N},\ \alpha=53{,}13º\ \text{y}\ \beta=36{,}87º$$

85. Un coche viaja a 100 km/h durante 45 minutos en dirección Norte hasta llegar a una rotonda donde realiza un giro de 270º. En la nueva carretera, circula durante 30 minutos a una velocidad de 90 km/h.

a) Usando vectores, dibuja un esquema de la situación.

b) Indica cuál es el módulo, dirección y sentido del vector desplazamiento total, siendo su origen el punto donde se inicia el recorrido y su extremo el punto donde se acaba.

a)

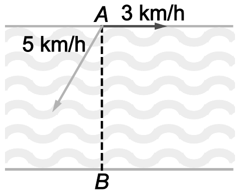


b) $AR = 100 \cdot 0{,}75 = 75$ km, $RB = 90 \cdot 0{,}5 = 45$ km

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{75^2 + 45^2} = 87{,}46 \text{ km}$$

$$\widehat{BAR} = \text{arctg}\,\frac{45}{75} = 30{,}96^\circ$$

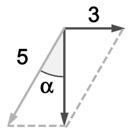
86. Daniel quiere cruzar un río de una orilla a otra y de forma perpendicular a ambas. Daniel consigue nadar con una velocidad de 5 km/h pero la corriente del río lleva una velocidad de 3 km/h.



a) ¿En qué dirección debe nadar para conseguir llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*?

b) ¿Cuál será la velocidad resultante?

c) ¿Qué pasaría si la velocidad que consigue Daniel fuese menor que la velocidad de la corriente?

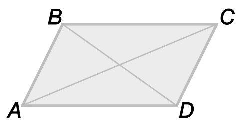


a) $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{3}{5} \simeq 36{,}87^\circ$, Daniel debe nadar con 36,87º respecto de la perpendicular al río.

b) La velocidad resultante será $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h

c) No existiría ninguna dirección con la que Daniel consiguiese llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*, ya que el arcsen no estaría definido en este caso.

87. Dado el paralelogramo *ABCD* demuestra que la suma de los cuadrados de las dos diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados consecutivos del paralelogramo. Para ello, ayúdate del cálculo vectorial y demuestra que $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$.

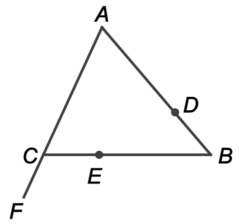


Aplicando las fórmulas de ejercicio resuelto 27:

$$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

PARA PROFUNDIZAR

88. En la figura adjunta, del triangulo *ABC* se consideran los puntos *D*, *E* y *F* sobre las rectas que contienen sus lados, de forma que: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ y $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.



Demuestra que *D*, *E* y *F* están alineados. Para ello:

a) Escoge una base conveniente y escribe los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ como combinación lineal de los vectores de la base.

b) Con ayuda del apartado anterior, relaciona los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$.

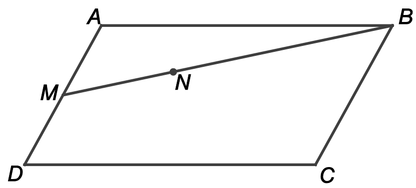
a) Se toma la base $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$, así:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) Los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ son iguales por lo que *D*, *E* y *F* están alineados

89. En la figura:



- ***ABCD* es un paralelogramo.**
- ***M* es el punto medio del segmento *AD*.**
- $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM}$

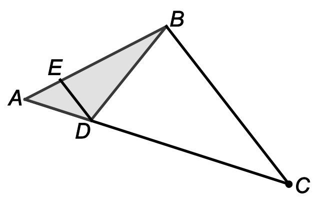
Demuestra que los puntos *C*, *N* y *A* están alineados.

En la base $\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\}$ tenemos: *A*(0, 1), *B*(1, 1), *C*(1, 0), *D*(0, 0) y $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Por tanto, si $N(n_1, n_2)$: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1) = (-2n_1, 1 - 2n_2) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}, n_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

De este modo, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{CA} = (-1, 1)$ son proporcionales, por lo que *C*, *N* y *A* están alineados.

90. En la figura:



- ***ABC* es un triángulo cualquiera.**
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$

Demuestra que las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

En la base $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$ tenemos *A*(0, 0), *B*(0, 1), *C*(4, 0), *D*(1, 0) y $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto, $\overrightarrow{BC} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{ED} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$ son proporcionales, es decir, las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

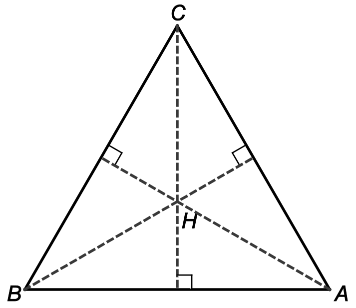
91. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra el teorema del coseno en un triángulo ABC. Para ello, utiliza el producto escalar.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + 2ba\cos\left(180° - \hat{C}\right) + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\hat{C}$$

92. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Consideremos un triángulo *ABC* y sus alturas trazadas desde *A* y *B*, que se cortarán en un punto *H*. Queremos probar que *H* también pertenece a la altura trazada desde *C*.



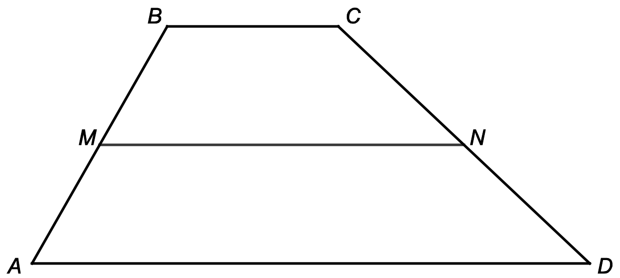
Para ello observemos que $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, igual que lo son $\overrightarrow{BH}$ y $\overrightarrow{AC}$, y basta demostrar que también lo son $\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{AB}$, es decir, que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+0=$$

$$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

93. Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela a las bases.

Consideremos un trapecio *ABCD* con lados no paralelos *AB* y *CD*, y sean *M* y *N* los respectivos puntos medios de estos lados.



Tenemos:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

Y, como $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos, se concluye que $\overrightarrow{MN}$ también es paralelo a estos dos vectores.

ENTORNO MATEMÁTICO

Perdido en el desierto

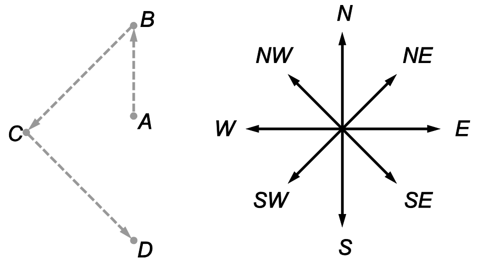
Durante sus vacaciones y antes de empezar la Universidad, Javier, ha decidido realizar un viaje por Mongolia.

Ahora mismo se encuentra visitando el desierto de Gobi, pero como es un despistado incorregible, ha perdido de vista al guía que acompaña a su grupo y se encuentra perdido.

La falta de agua y el calor lo están consumiendo poco a poco y, de no encontrar una solución, no tardará mucho en morir. De pronto, y mientras está vagando sin ningún criterio, encuentra un poste anclado en la arena con una inscripción en árabe. Suerte que Javier hizo caso de su madre que, hace ya tiempo, le dijo: "Hijo: además del inglés sería conveniente que aprendieras, por lo menos, otra lengua. Y mejor sería que fuera alguna de las de los países emergentes: el chino, el hindi, el ruso… Tampoco estaría mal que aprendieras árabe" y aprendió esta lengua.

- **Partiendo de este punto, camina 3 km hacia el Norte y encontrarás arena.**
- **Después, camina otros 5 km dirigiéndote hacia el Suroeste y seguirás encontrando arena.**
- **Finalmente, toma otra dirección hasta que llegues a 4071 m justo al sur del punto inicial del viaje, donde seguirás encontrando arena.**
- **Si vuelves al punto inicial y recorres la misma distancia y con la misma dirección que las del tercer tramo del camino indicado, ¡encontrarás un OASIS!**

Javier consigue traducir el mensaje, que parece obra de un bromista y ante la alternativa de quedarse a esperar que lo encuentren o intentar salir por sus propios medios, opta por esto último y realiza un esquema:



a) Calcula el módulo y el ángulo con la dirección Oeste – Este que forma el tercer tramo del camino.

b) Elige una referencia cartesiana conveniente y establece las coordenadas de los puntos del camino y del punto donde está situado el oasis.

Si se considera el sistema de referencia en el que A es el origen de coordenadas y la dirección Oeste – Este es el eje de abscisas, tenemos $A(0, 0)$, $B(0,3)$, $C\left(c_1, c_2\right)$ y $D(0; -4{,}071)$.

Las condiciones del problema implican:

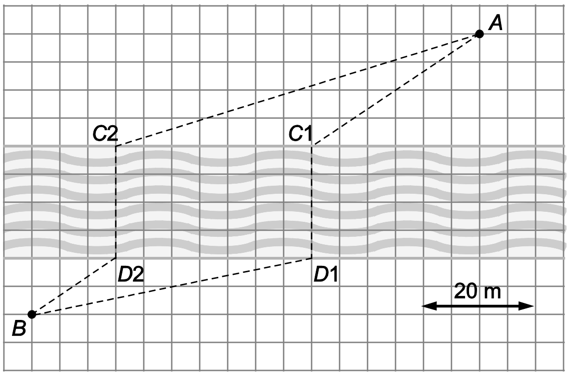
$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5 \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 15\cos 45^\circ = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^2 + (c_2-3)^2 = 25 \\ -3(c_2-3) = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{6-5\sqrt{2}}{2},\ c_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$$

El oasis se encuentra en el punto O tal que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD}$, es decir, $O\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}; -4{,}071 - \dfrac{6-5\sqrt{2}}{2}\right) \simeq (3{,}5355; -4{,}6065)$.

Por tanto, la longitud del tercer tramo es $\left|\overrightarrow{CD}\right| \simeq \sqrt{3{,}5355^2 + (-4{,}6065)^2} \simeq 5{,}8069$ km y el ángulo que forma con la dirección Oeste – Este es $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-4{,}6065}{3{,}5355}\right) \simeq 307{,}51^\circ$.

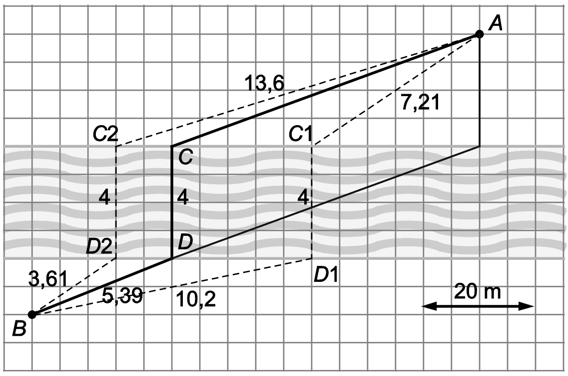
Aventura en el Tuul

Días más tarde y tras su aventura en el desierto, Javier, que no está todavía suficientemente cansado de aventuras, ha ido al Parque Nacional Khustain Nuruu. En un cierto momento, se encuentra en el punto *A* y quiere dirigirse al punto *B* pero atravesando el río Tuul de forma perpendicular a sus orillas.



a) Con la ayuda de GeoGebra, dibuja y calcula la distancia recorrida tomando los caminos $A \to C1 \to D1 \to B$ y $A \to C2 \to D2 \to B$.

b) También con GeoGebra, mediante tanteo y calculando varios caminos, intenta aproximar el camino de mínima longitud para ir de *A* a *B*.



$A \to C1 \to D1 \to B$: 5 (7,21 + 4 + 10,2) = 107,05 m

$A \to C2 \to D2 \to B$: 5 (13,6 + 4 + 3,61) = 106,05 m.

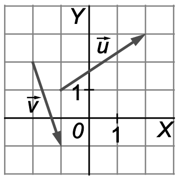
El camino más corto es

$A \to C \to D \to B$: 5 (11,39 + 4 + 5,70) = 104,44 m

AUTOEVALUACION

Comprueba lo que has aprendido

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura:



a) Calcula las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$ y $2\vec{u}-3\vec{v}$

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a) $\vec{u}=(3,\,2)$ y $\vec{v}=(1,\,-3)$, por tanto, $\vec{u}+\vec{v}=(4,\,-1)$ y $2\vec{u}-3\vec{v}=(6,\,4)-(3,\,-9)=(3,\,13)$

b) $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{130}}{130}\Rightarrow\alpha=105{,}26°$

2. Dados los puntos *A*(2, 4), *B*(–4, 2) y *C*(–3, –1):

a) Calcula el punto *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.

b) ¿Es el anterior paralelogramo un rectángulo?

a) Si $D(d_1,\,d_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(-6,\,-2)=(-3-d_1,\,-1-d_2)\Rightarrow d_1=3,\,d_2=1\Rightarrow D(3,\,1)$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(-6,\,-2)\cdot(1,\,-3)=-6+6=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares y *ABCD* sí es un rectángulo.

3. a) Calcula el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$, sabiendo que *A*(–3, 4) y que es equipolente a $\vec{u}=(2,\,2)$.

b) Calcula el origen del vector $\overrightarrow{AB}$, sabiendo que *B*(5, –1) y que es equipolente a $\vec{u}=(-2,\,3)$.

a) Si $B(b_1,\,b_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Rightarrow(b_1+3,\,b_2-4)=(2,\,2)\Rightarrow b_1=-1,\,b_2=6\Rightarrow B(-1,\,6)$

b) Si $A(a_1,\,a_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Rightarrow(5-a_1,\,-1-a_2)=(-2,\,3)\Rightarrow a_1=7,\,b_2=-4\Rightarrow A(7,\,-4)$

4. Calcula los ángulos del triángulo *A*(–3, 2), *B*(3, 5) y *C*(–2, 0), y comprueba que se trata de un triángulo rectángulo.

$\overrightarrow{AB}=(6,\,3)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,\,-2)\Rightarrow\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=0\Rightarrow\hat{A}=90°$. El triángulo es rectángulo.

$\overrightarrow{BA}=(-6,\,-3)$ y $\overrightarrow{BC}=(-5,\,-5)\Rightarrow\cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{45}{\sqrt{45\cdot50}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\hat{B}=18{,}43°$

$\overrightarrow{CA}=(-1,\,2)$ y $\overrightarrow{CB}=(5,\,5)\Rightarrow\cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5\cdot50}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\hat{C}=71{,}57°$

5. a) Calcula todos los vectores que sean paralelos a $\vec{u}=(-9,\,12)$ y que tengan módulo 5.

b) Calcula todos los vectores que sean perpendiculares a $\vec{u}(10,\,-24)$ y que tengan módulo 13.

a) Todos los vectores paralelos a $\vec{u}$ son de la forma $(-3t,\,4t)$ con $t\in\mathbb{R}$, obligando a que tengan módulo 5:

$5=\sqrt{(-3t)^2+(4t)^2}=\pm5t\Rightarrow t=1,\,t=-1$. Tenemos, por tanto, dos soluciones, $\vec{v}=(-3,\,4)$ y $\vec{w}=(3,\,-4)$

b) Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ son de la forma $(12t,\,5t)$ con $t\in\mathbb{R}$, obligando a que tengan módulo 13:

$13=\sqrt{(12t)^2+(5t)^2}=\pm13t\Rightarrow t=1,\,t=-1$. Tenemos, por tanto, dos soluciones, $\vec{v}=(12,\,5)$ y $\vec{w}=(-12,\,-5)$

6. Dados los vectores $\vec{u}=(-3,\ 5)$ y $\vec{v}=(10,\ 3)$ calcula la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\left|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}\right|=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{15}{\sqrt{109}}=\frac{15\sqrt{109}}{109}$$

7. Determina el ángulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\left|\vec{u}\right|=4$, $\left|\vec{v}\right|=6$ y $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=8$.

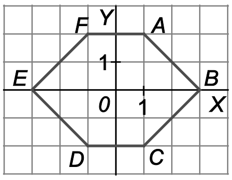
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2}{2}=\frac{16+36-64}{2}=-6\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=-\frac{6}{24}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha=104{,}48^\circ$$

8. Escribe el vector $\vec{a}=(-10,\ 12)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(3,\ -4)$ y $\vec{c}=(1,\ -1)$. ¿Forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$ una base de V^2? Si es así, indica las coordenadas de $\vec{a}$ en dicha base.

$\frac{1}{3}\neq\frac{-1}{-4}\Rightarrow\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base de V^2.

$$\vec{a}=a_1\vec{b}+a_2\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}3a_1+a_2=-10\\-4a_1-a_2=12\end{cases}\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=-4\Rightarrow\vec{a}=-2\vec{b}-4\vec{c}=(-2,\ -4)$$

9. En el hexágono *ABCDEF*, calcula las coordenadas de: $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}$ y $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{EF}+4\overrightarrow{AF}$.



$$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}=(-2,\ 0)-(2,\ 2)+(2,\ -2)=(-2,\ -4)$$

$$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{EF}+4\overrightarrow{AF}=2(2,\ -2)-3(2,\ 2)+4(-2,\ 0)=(-10,\ -10)$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

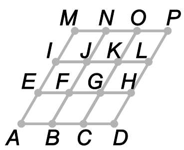
1. Se considera la siguiente figura.

A. $\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{IC}$

B. $\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{CI}$

C. $\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{IC}$

D. $\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{CI}$



La respuesta correcta es D.

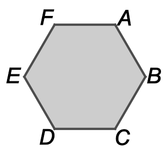
2. El hexágono de la figura es regular y su lado vale 1. El producto escalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$ vale:

A. 1

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



El ángulo que forman los dos vectores es 60º, y sus módulos valen $\sqrt{3}$, por tanto, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$, la respuesta C.

3. **El producto escalar de dos vectores no nulos es negativo. El ángulo que forman dicho vectores es:**

A. Menor de 90º **B.** Mayor de 90º **C.** Menor de 45º **D.** 360º

Puesto que el coseno del ángulo será negativo, la respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Se consideran los vectores** $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ **y** $\vec{v} = \frac{1}{4}(3, 2)$

A. Los vectores tienen el mismo módulo.

B. Los vectores son ortogonales.

C. Los vectores son linealmente independientes.

D. Los vectores son linealmente dependientes.

A es correcta, ya que $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

B es correcta, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{8} - \frac{6}{16} = 0$.

C es correcta, y por tanto D no lo es, ya que las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales.

5. **Se consideran los puntos** ***A*(–2, 1) y *B*(2, –1).**

A. El origen de coordenadas está alineado con ellos.

B. El punto *C*(4, 3) determina con ellos un triángulo rectángulo.

C. El punto *C*(4, 3) determina con ellos un triángulo isósceles.

D. El producto escalar de los vectores de posición de *A* y *B* vale 5.

A es correcta, ya que $\overrightarrow{OA} = (-2, 1)$ y $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$ son proporcionales.

B es correcta, ya que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4, 2) \cdot (2, 4) = -8 + 8 = 0$.

C es correcta, ya que $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.

D no es correcta, ya que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4 - 1 = -5$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de V^2. Se consideran las afirmaciones:**

1. El vector $\vec{u} = (2, -3)$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

2. $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

Obviamente $2 \Rightarrow 1$, pero el reciproco no es cierto, basta tomar como ejemplo $\vec{v} = \vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{0}$, por tanto, la respuesta correcta es C.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para ello se dan los siguientes datos:

1. $|\vec{u}| = 8$ **2.** $|\vec{v}| = 6$ **3.** $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$ **4.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 37{,}5$

A. Únicamente puede eliminarse el dato 1.

B. Únicamente puede eliminarse el dato 2.

C. Únicamente puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse cualquiera de los cuatro.

Como $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$, se puede deducir cualquiera de los datos a partir de los otros tres, por tanto, la respuesta correcta es D.

5 Geometría analítica

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Comprueba si los puntos *A*(–2, 3), *B*(2, –3) y *C*(–2, 5) pertenecen o no a la recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

La recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$, que es paralelo al eje *Y*, es la recta vertical $r: x = -2$, por lo que únicamente los puntos cuya abscisa sea –2 pertenecen a la recta, es decir, *A* y *C* pertenecen a *r* pero *B* no.

4. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto *A*(–3, 5).

La recta paralela al eje *X* que pasa por *A* es $y = 5$, y la recta paralela al eje *Y* que pasa por *A* es $x = -3$.

5. Indica dos puntos y el vector director de la recta *r*: $8x + y = 7$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, *A*(1, –1) y *B*(0, 7), el vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 8)$.

6. En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) *A*(2, –5) y *B*(1, –3) **b)** *A*(–2, –4) y *B*(3, –2)

a) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por *A*(2, –5). Por tanto:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x - 4 = -y - 5 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$$

b) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por *A*(–2, –4). Por tanto:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 5y + 20 \Rightarrow 2x - 5y - 16 = 0$$

7. Halla el valor de *k* para que la recta que pasa por los puntos A(2, –1) y B(3, *k*) pase por el punto C(0, –4).

C pertenece a la recta que pasa por *A* y *B* si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, k+1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, -3)$ son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{1}{-2} = \frac{k+1}{-3} \Rightarrow -2k - 2 = -3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

8. Halla *k* para que: $r: (k+5)x - (3+k)y = 1 - k$ pase por *P*(2, 3).

Sustituyendo las coordenadas de *P* en la ecuación de la recta tenemos $2(k+5) - 3(3+k) = 1 - k \Rightarrow 0 = 0$, por tanto, el punto *P* pertenece a *r* para cualquier valor real de *k*.

9 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Indica un vector director y otro normal de la recta de ecuación $-3x + 2y - 4 = 0$.

Un vector normal es $\vec{n} = (-3, 2)$ y un vector director es $\vec{u} = (2, 3)$.

13. Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overline{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \simeq (-6, 1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 6)$

14. Una recta tiene como vector normal a $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$. Escribe su ecuación general.

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es $2x - 3y + 8 = 0$.

15. Halla la ecuación normal de la recta que pasa por $P(1, -3)$ y es perpendicular a la que pasa por $A(0, 2)$ y $B(-1, 0)$.

La recta tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (-1, -2) \approx (1, 2)$ y pasa por el punto P, por tanto, su ecuación normal es:

$(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ o $x + 2y + 5 = 0$.

16. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a $3x - 6y = 1$ y que pasa por el punto $A(-3, 2)$

Todas las perpendiculares a $3x - 6y = 1$ son de la forma $6x + 3y + k = 0$.Obligando a que A pertenezca a la perpendicular tenemos $-18 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$ y, por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es

$6x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0$.

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular a $5x + 4y - 3 = 0$ que corta a la recta $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$.

Todas las rectas perpendiculares a $5x + 4y - 3 = 0$ son de la forma $4x - 5y + k = 0$. Obligando a que corte a $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$, es decir, a que pase por el punto $(1, 1)$ tenemos $4 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es $4x - 5y + 1 = 0$.

18. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

La recta tiene vector normal $\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ y pasa por el punto C, por tanto, su ecuación es:

$1(x - 3) + 6(y - 0) = 0 \Rightarrow x + 6y - 3 = 0$

19. Considera el triángulo de vértices $A(5, 3)$, $B(7, -1)$ y $C(1, -1)$. Halla la altura correspondiente al vértice A.

La altura correspondiente al vértice A pasa por este punto y es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (-6, 0) \simeq (1, 0)$, por tanto su ecuación es $(x - 5) + 0(y - 3) = 0 \Rightarrow x = 5$.

20. Ejercicio resuelto.

21. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 4) y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por *A*: $4 = -1 + n \Rightarrow n = 5$. Por tanto, la ecuación es $y = \frac{x}{2} + 5 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$.

22. Indica el vector director y la pendiente de las siguientes rectas:

a) $-2x + y + 7 = 0$ **b)** $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ **c)** $y = 5x - 3$ **d)** $x + 4 = \frac{y-1}{2}$

a) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

b) Vector director: $\vec{u} = (3, -1)$. Pendiente: $m = -\frac{1}{3}$.

c) Vector director: $\vec{u} = (1, 5)$. Pendiente: $m = 5$.

d) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

23. Calcula la ecuación de la recta que tiene doble pendiente que la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente es $m = 2$ y pasa por *O*(0, 0), por tanto, la ecuación es $y = 2x$.

24. Halla la ecuación punto–pendiente de la recta que pasa por el punto *A*(–2, 5) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje *X*.

La pendiente es $m = -\sqrt{3}$ y pasa por *A*, por tanto, la ecuación es $y - 5 = -\sqrt{3}\left(x + 2\right)$.

25. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos:

a) *A*(–1, 5) y *B*(2, –2) **b)** *A*(1, 2) y *B*(2, –1) **c)** *A*(0, –5) y *B*(5, 0) **d)** *A*(–1, –4) y *B*(2, –4)

Sea $y = mx + n$ la ecuación explícita de la recta, donde *m* es la pendiente y *n* es la ordenada en el origen. Los puntos dados han de verificar la ecuación, por lo que se tiene:

a) $\begin{cases} -m + n = 5 \\ 2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{7}{3},\ n = \frac{8}{3}$

c) $\begin{cases} n = -5 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1,\ n = -5$

b) $\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -3,\ n = 5$

d) $\begin{cases} -m + n = -4 \\ 2m + n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 0,\ n = -4$

26. Halla la ecuación explícita y la punto–pendiente de la recta que pasa por *A*(0, 5) y es perpendicular a $3x + 5y + 2 = 0$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (3, 5)$, por tanto, tiene pendiente $m = \frac{5}{3}$, además pasa por *A*, con lo que su ecuación punto–pendiente es $y - 5 = \frac{5}{3}x$ y su ecuación explícita es $y = \frac{5}{3}x + 5$.

27. Ejercicio interactivo.

28 a 30. Ejercicios resueltos.

31. Indica, en cada caso, si las rectas *r* y *s* son paralelas o secantes y, en este último caso, obtén el punto de intersección:

a) $r:\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 3+2t \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 2s \\ y = -s \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x+5y-5=0 \\ s: 3x-5y+5=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2-4t = 2s \\ 3+2t = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t+s = 1 \\ 2t+s = -3 \end{cases}$ Como el sistema es incompatible, las dos rectas son paralelas.

b) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ Son rectas secantes. Calculamos el punto de corte: $\begin{cases} 2x+5y-5=0 \\ 3x-5y+5=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=1 \Rightarrow P(0,\ 1)$

32. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta *r*: 2*x* + *y* + 1= 0 y que pasa por el punto de intersección de las rectas *s*: *x* – *y* + 5 = 0 y *t*: *x* + *y*+ 1 = 0.

Se calcula el punto de intersección de *s* y *t* :

$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-3,\ y=2 \Rightarrow P(-3,\ 2)$

El haz de rectas paralelas a *r* tiene ecuación $2x+y+K=0$. Como la recta buscada pasa por *P*, se tiene:

$-6+2+K=0 \Rightarrow K=4$. Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $2x+y+4=0$.

33. Halla la ecuación del haz cuyo vértice es *P*(–5, 4).

$\{y-4=m(x+5),\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x=-5\}$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Calcula *k* para que la distancia entre las rectas 5*x* + 12*y* – *k* = 0 y 5*x* + 12*y* + 15 = 0 sea 2.

Observemos que las rectas dadas son paralelas. Tenemos:

$d(r,\ s)=2 \Rightarrow \frac{|-k-15|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2 \Rightarrow |-k-15|=26 \Rightarrow \begin{cases} -15-k=26 \\ -15-k=-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-41 \\ k=11 \end{cases}$

37. Comprueba si los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos:

a) *A*(–2, 1), *B*(0, 3) y *C*(3, 7)

b) $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ y $C\left(1,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $d(A,\ B)=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ u, $d(B,\ C)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ u y $d(C,\ A)=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ u

Por tanto, se trata de un triángulo escaleno.

b) $d(A,\ B)=\sqrt{1^2+0^2}=1$ u, $d(B,\ C)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ u y $d(C,\ A)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ u

Por tanto, se trata de un triángulo equilátero.

38. Calcula el área del triángulo determinado por *O*(0, 0) y las intersecciones de la recta $x + 2y = 4$ con los ejes.

El triángulo tiene por vértices $O(0, 0)$,$A(0, 2)$ y $B(4, 0)$.

El área del triángulo es $A = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$ con: $\text{base} = d(O,B) = 4$ u , $\text{altura} = d(O,A) = 2$ u

Por tanto, $A = \dfrac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \dfrac{4\cdot 2}{2} = 4\ \text{u}^2$

39. Calcula la medida de las alturas del triángulo de vértices *A*(4, 1),*B*(–1, 3) y *C*(0, 4).

$AB: 2x + 5y - 13 = 0$, $BC: x - y + 4 = 0$ y $AC: 3x + 4y - 16 = 0$, por tanto, las alturas miden:

$h_{AB} = d(C,\ AB) = \dfrac{|20-13|}{\sqrt{4+25}} = \dfrac{7}{\sqrt{29}} = \dfrac{7\sqrt{29}}{29}$ u $\qquad h_{BC} = d(A,\ BC) = \dfrac{|4-1+4|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ u

$h_{AC} = d(B,\ AC) = \dfrac{|-3+12-16|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{7}{5}$ u

40. Halla la distancia del punto *C*(10, 0) a la recta que pasa por *A*(–2, 3) y *B*(2, 2). ¿Cuál es la posición relativa de *A*, *B* y *C*?

La recta *AB* tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (4,\ -1)$ y pasa por *A*, su ecuación es: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

$d(C, AB) = \dfrac{|10-10|}{\sqrt{1+16}} = 0$ u , lo que significa que *C* pertenece a la recta *AB*, es decir, *A*, *B* y *C* están alineados.

41. Ejercicio resuelto.

42. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) *r*: $3x - 4y = 0$ y *s*: $2x + 2y + 3 = 0$

b) *r*: $y = x - 5$ y *s*: $y = 2x + 2$

a) Vectores normales: $\overrightarrow{n_r} = (3,\ -4)$ y $\overrightarrow{n_s} = (2,\ 2)$. Luego: $\cos\alpha = \cos\widehat{(r,s)} = \dfrac{|\overrightarrow{n_r}\cdot\overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_r}|\cdot|\overrightarrow{n_s}|} = \dfrac{2}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81{,}87^\circ$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, por tanto, $\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\dfrac{1-2}{1+2}\right| = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18{,}43^\circ$.

43. Calcula el ángulo formado por *r*: $4x + 2y - 7 = 0$ y el eje *Y*.

Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (4,\ 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0)$, luego $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^\circ$

44. Calcula la recta perpendicular a *r* :$x + y - 3 = 0$ y que pasa por el punto *P*(–3, 3).

La pendiente de la recta *r* es $m = -1$, por tanto, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m' = 1$.

Así, la ecuación de la recta buscada es $y - 3 = x + 3 \Rightarrow y = x + 6$

45 y 46. Ejercicios resueltos.

47. Calcula el simétrico de *P*(–2, 3) respecto del punto *M*(1, –4).

Sea *P′*(*a, b*) el punto buscado, *M* es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Por tanto:

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right) = (1, -4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+a}{2} = 1 \\ \dfrac{3+b}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

48. Halla la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Calculamos el punto *Q* de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría: *Q*(0, 1)

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico *P′* de otro punto cualquiera, *P*, del eje de ordenadas, ya que la recta buscada quedará determinada por los puntos *Q* y *P′*.

Tomando *P*(0, –1), la recta perpendicular a $y = x + 1$ que pasa por *P* es $y = -x - 1$.

Ambas rectas se cortan en *M*(–1, 0) y *M* debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, por lo que *P′*(–2, 1).

Por lo tanto, la recta simétrica buscada es la que pasa por *Q* y *P′*, cuya ecuación es $y = 1$.

49. Determina el triángulo simétrico del *k*(4, 0), *B*(–1, 6) y *C*(–1, –1) respecto de la simetría central con centro el origen de coordenadas.

El simétrico de un punto *P*(*a*, *b*) respecto de la simetría central con centro *O*(0, 0) es *P′*(–*a*, –*b*).

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son *A′*(–4, 0), *B′*(1, –6) y *C′*(1, 1).

50. Encuentra el triángulo simétrico del *A*(3, 0), *B*(0, 3) y *P*(–2, –2) respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$.

El simétrico de un punto *P*(*a*, *b*) respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$ es *P′*(*b*, *a*).

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son *A′*(0, 3), *B′*(3, 0) y *C′*(–2, –2).

51. Halla el extremo *B* del segmento $\overline{AB}$ siendo *A*(2, 1) y sabiendo que la mediatriz del segmento es $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sea *B*(*a*, *b*), como la mediatriz es perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (a-2, b-1)$, este vector debe ser proporcional a $\overrightarrow{n_r} = (1, 2)$. Además, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ debe pertenecer a *r*, por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{1} = \dfrac{b-1}{2} \\ \dfrac{2+a}{2} + 2\dfrac{1+b}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

52. Ejercicio interactivo.

53. Halla la mediatriz del segmento de extremos *A*(–1, 3) y *B*(5, –3).

Los puntos *P*(*x*, *y*) de la mediatriz verifican: $d(A, X) = d(B, X) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

54. Halla el punto de la recta *r*: *x* – 3*y* – 11 = 0 que equidista de los puntos *A*(–2, 3) y *B*(6, –1).

Los puntos que equidistan de *A* y *B* pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, de ecuación:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-12x+36+y^2+2y+1\Rightarrow 2x-y-3=0$$

Por tanto, el punto *P* buscado es la intersección de la mediatriz con $r:\begin{cases}x-3y-11=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow P\left(-\frac{2}{5},-\frac{19}{5}\right)$

55. Dadas las rectas *r*: *x* – 3*y* + 4 = 0 y *s*: *x* + *y* = 0, obtén sus bisectrices, comprueba que se cortan en el punto de intersección de *r* y *s* y que son perpendiculares.

Los puntos *P*(*x*, *y*) de las bisectrices verifican:

$$d(P,r)=d(P,s)\Rightarrow\frac{|x-3y+4|}{\sqrt{10}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{x-3y+4}{\sqrt{10}}=\pm\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}b_1:\left(\sqrt5-1\right)x+\left(\sqrt5+3\right)y-4=0\\b_2:\left(\sqrt5+1\right)x+\left(\sqrt5-3\right)y+4=0\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es: $\begin{cases}x-3y+4=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=1\Rightarrow P(-1\quad 1)$

P verifica la ecuación de cada una de las bisectrices: $\begin{cases}\left(\sqrt5-1\right)(-1)+\left(\sqrt5+3\right)\cdot1-4=-\sqrt5+1+\sqrt5+3-4=0\\\left(\sqrt5+1\right)(-1)+\left(\sqrt5-3\right)\cdot1+4=-\sqrt5-1+\sqrt5-3+4=0\end{cases}$

Los vectores normales a b_1 y b_2 son, respectivamente, $\vec{n_1}=\left(\sqrt5-1,\sqrt5+3\right)$ y $\vec{n_2}=\left(\sqrt5+1,\sqrt5-3\right)$, que verifican $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=5-1+5-9=0$, por lo que ambas bisectrices son perpendiculares.

56. Halla los puntos de la recta *r* :*y* = –*x* + 6 que equidistan de las rectas *s*: 3*x* – *y* = 1 y *t* : 3*x* + *y* = 5.

Los puntos que equidistan de *s* y *t* son los pertenecientes a sus bisectrices, de ecuaciones:

$$\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x+y-5|}{\sqrt{10}}\Rightarrow 3x-y-1=\pm(3x+y-5)\Rightarrow\begin{cases}b_1:y=2\\b_2:x=1\end{cases}$$

Los puntos buscados son, por tanto, los puntos de corte de *r* con cada una de las bisectrices: $P_1(4, 2)$ y $P_2(1, 5)$.

57. Dado el triángulo de vértices *A*(5, 1), *B*(3, 7) y *C*(–2, 3):

a) Calcula el circuncentro. **b)** Calcula el incentro. **c)** Calcula el baricentro.

a) El circuncentro, *T*, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

$$\begin{cases}\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(7-y)^2}\\\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(-2-x)^2+(3-y)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x+12y=32\\-14x+4y=-13\end{cases}\Rightarrow x=\frac{71}{38},\ y=\frac{125}{38}\Rightarrow T\left(\frac{71}{38},\frac{125}{38}\right)$$

b) El incentro, *I*, es es punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo. Por tanto:

Recta *AB*: 3*x* +*y*– 16 = 0 Recta *BC*: 4*x* – 5*y*+ 23 = 0 Recta *AC*: 2*x* + 7*y*– 17 = 0

$$\begin{cases}\frac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\frac{|4x-5y+23|}{\sqrt{41}}\\\frac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\frac{|2x+7y-17|}{\sqrt{53}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3\sqrt{53}+2\sqrt{10})x+(\sqrt{53}+7\sqrt{10})y=17\sqrt{10}+16\sqrt{53}\\(3\sqrt{41}+4\sqrt{10})x+(\sqrt{41}-5\sqrt{10})y=16\sqrt{41}-23\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow I(2{,}06;\ 3{,}82)$$

c) El baricentro, *G*, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

Punto medio de *AB*: $M_1(4, 4)$ Punto medio de *BC*: $M_2\left(\frac{1}{2},5\right)$

$$\begin{cases}CM_1:x-6y+20=0\\AM_2:8++9y-49=0\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=\frac{11}{3}\Rightarrow T\left(2,\frac{11}{3}\right)$$

58 a 65. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de la recta

66. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos *P*(–2, 1) y *Q*(3, –1) pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una:

a) $r_1:(x,\ y)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)$ **b)** $r_2:\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=1+2\lambda\end{cases}$ **c)** $r_3:2x+5y=1$ **d)** $r_4:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}$

a) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$(-2,\ 1)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}-2=7+4\lambda\\ 1=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{9}{4}\\ \lambda=-3\end{cases}\Rightarrow P\notin r_1$$

$$(3,\ -1)=(7,\ -2)+\lambda(4,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}3=7+4\lambda\\ -1=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow Q\in r_1$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda=0$ obtenemos el punto *R*(7, –2)

b) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases}-2=-2+\lambda\\ 1=1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\end{cases}\Rightarrow P\in r_2 \qquad \begin{cases}3=-2+\lambda\\ -1=1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=5\\ \lambda=-1\end{cases}\Rightarrow Q\notin r_2$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda=1$ obtenemos el punto *R*(–1, 3)

c) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$2(-2)+5\cdot 1=1\Rightarrow P\in r_3$ $\quad 2\cdot 3+5(-1)=1\Rightarrow Q\in r_3$ Otro punto de la recta es, por ejemplo, *R*(–7, 3)

d) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$\frac{-2+1}{2}\neq\frac{1-2}{5}\Rightarrow P\notin r_4 \qquad \frac{3+1}{2}\neq\frac{-1-2}{5}\Rightarrow Q\notin r_4$$

67. Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas.

a) La recta que pasa por el punto *P*(–3, 1) y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(-1,\ -2)$.

b) La recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(1, 4).

c) La recta que tiene como uno de sus vectores de dirección el $\vec{u}=(-3,\ 3)$ y corta a la parte positiva del eje de abscisas en un punto que dista 3 unidades del origen de coordenadas.

d) La recta que tiene como vector director el $\vec{u}=(2,\ -5)$ y corta a la parte negativa del eje de abscisas en un punto que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

e) La recta que tiene por dirección la del vector $\vec{u}=(3,\ 7)$ y corta a la parte negativa del de abcisas en un punto que dista 2 unidades a la izquierda del origen de coordenadas.

a) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-3,\ 1)+\lambda(-1,\ -2)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-3-\lambda\\ y=1-2\lambda\end{cases}$

b) Vector director: $\overline{AB}=(-1,\ 7)$ E. vectorial: $r:(x,\ y)=(2,\ -3)+\lambda(-1,\ 7)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=-3+7\lambda\end{cases}$

c) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(3,\ 0)+\lambda(-3,\ 3)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=3-3\lambda\\ y=3\lambda\end{cases}$

d) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-2,\ 0)+\lambda(2,\ -5)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=-5\lambda\end{cases}$

e) E. vectorial: $r:(x,\ y)=(-2,\ 0)+\lambda(3,\ 7)$ E. paramétricas: $r:\begin{cases}x=-2+3\lambda\\ y=7\lambda\end{cases}$

68. Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.

a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.

b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.

d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.

e) Pasa por el punto $P(-2, 7)$ y es perpendicular al segmento de extremos $M(-1, -3)$ y $N(0, 4)$.

a) Ecuación continua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+4}{-2}$ Ecuación general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Ecuación continua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{6}$ Ecuación general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Ecuación continua: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4}$ Ecuación general: $4x + 3y = 0$

d) El punto medio del segmento $\overline{MN}$ es $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-\frac{1}{2}}$ Ecuación general: $-\frac{1}{2}x = 3y \Rightarrow x + 6y = 0$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (1, 7)$ Vector director: $\vec{u} = (7, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x+2}{7} = \frac{y-7}{-1}$ Ecuación general: $-x - 2 = 7y - 49 \Rightarrow x + 7y - 47 = 0$

69. Halla un vector director y otro normal a cada una de las siguientes rectas.

a) $r: -2x + 3y = 5$

b) $s: x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$

c) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

d) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

e) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector normal: $\vec{n} = (-2, 3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

b) Vector normal: $\vec{n} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ Vector director: $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

c) Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-7, 4)$ Vector normal: $\vec{n} = (4, 7)$

d) El punto medio del segmento es $M(0, 1)$

Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{MO} = (0, -1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (2, -3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

70. Obténlas ecuaciones de los lados del triángulo de vértices *P*(1, 3), *Q*(–4, 0) y *R*(–2, –1). Para cada lado, halla un vector de dirección y otro normal.

Lado *PQ*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PQ} = (-5, -3)$. Un vector normal es $\vec{n} = (3, -5)$.

La ecuación es $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x+3 = -5y+15 \Rightarrow 3x-5y+12=0$

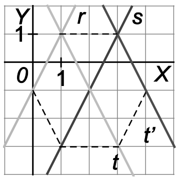
Lado *QR*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{QR} = (2, -1)$. Un vector normal es $\vec{n} = (1, 2)$.

La ecuación es $\frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{-1} \Rightarrow -x-4 = 2y \Rightarrow x+2y+4=0$

Lado *PR* .Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PR} = (-3, -4)$. Un vector normal es $\vec{n} = (4, -3)$.

La ecuación es $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+4 = -3y+9 \Rightarrow 4x-3y+5=0$

71. Halla las ecuaciones punto-pendiente de las rectas *r*, *s*, *t* y *t'* de la figura.



La recta *r* pasa por P_1 (1, 1) y tiene pendiente $m_1 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-1)$.

La recta *s* pasa por P_2 (3, 1) y tiene pendiente $m_2 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-3)$.

La recta *t* pasa por P_3 (1, 1) y tiene pendiente $m_3 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-1)$.

La recta *t'* pasa por P_4 (3, 1) y tiene pendiente $m_4 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-3)$.

72. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r: y = -2x+3$ **b)** $s: 4x+3y-6=0$ **c)** $t: \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$ **d)** $w: \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{3}$

e) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

f) La recta que pasa por *P*(–4 ,3) y es paralela a *r*: $x - y + 3 = 0$.

a) La recta pasa por *P*(0, 3), vector director $\vec{u} = (1, -2)$.Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3-2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por *P*(0, 2), vector normal $\vec{n} = (4, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 4)$.Las ecuaciones son: $s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2+4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por *P*(2, 0), vector normal $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \simeq (2, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 2)$. Ecuaciones: $t: \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta pasa por *P*(4, –5), vector director $\vec{u} = (2, 3)$. Las ecuaciones son: $w: \begin{cases} x = 4+2\lambda \\ y = -5+3\lambda \end{cases}$

e) La recta pasa por *O*(0, 0), vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

f) La recta pasa por *P*(–4 ,3), vector normal $\vec{n} = (1, -1)$ y director $\vec{u} = (1, 1)$.Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = -4+\lambda \\ y = 3+\lambda \end{cases}$

73. Determina la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (-1, 3)$ como vector normal y pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación normal es $-1(x-0)+3(y+0)=0$.

La ecuación general es $-x+3y=0$.

74. Encuentra la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

El punto medio del segmento AB es $M\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

La ecuación normal es $2\left(x+\frac{3}{2}\right)+4(y+1)=0$

La ecuación general es $2x+4y+7=0$

75. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r: y=-2x+3$

b) $r: 2x-3y+5=0$

c) $r: -\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$.

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u}=(-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n}=(2, -7)$.

h) $r: \begin{cases} x=-3+5\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}$

a) $m=-2$

b) $2x-3y+5=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m=\frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0 \Rightarrow y=\frac{15}{2}x+25 \Rightarrow m=\frac{15}{2}$

d) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2, 1)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{1}{2}$

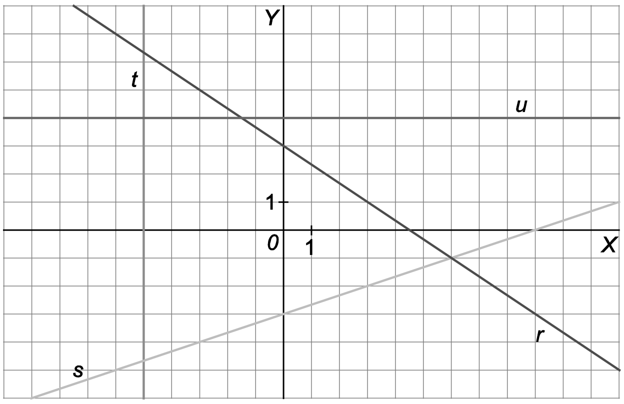
e) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0, 2a)$, la recta es vertical si $a \neq 0$ (si $a=0$ no hay recta) y por tanto, como $m=\frac{2a}{0}$ tiene pendiente infinita.

f) $m=-\frac{5}{3}$

g) El vector director es $\vec{u}=(7, 2)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{2}{7}$

h) El vector director es $\vec{u}=(5, 2)$, por tanto, la pendiente es $m=\frac{2}{5}$

76. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y determina, para cada una de ellas, su ecuación general.



Recta *r* :

$m=-\dfrac{2}{3},\ n=3 \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+3 \Rightarrow 2x+3y-9=0$

Recta *s*:

$m=\dfrac{1}{3},\ n=-3 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x-3 \Rightarrow x-3y-9=0$

Recta *t*:

$m=\infty$, no tiene ordenada en el origen $\Rightarrow x+5=0$

Recta *u*: $m=0,\ n=4 \Rightarrow y-4=0$

77. Halla la ecuación explícitade la recta que pasa por el punto *P*(–2, –5) y forma con la parte positiva del eje de ordenadas un ángulo de 60º.

La recta forma un ángulo de 30º con la parte positive del eje de abscisas, por lo que su pendiente es m=tg (30º) $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

La ecuación explícita es: $y+5=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}-15}{3}$

78. Determina la ecuación de la recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante que pasa por el punto *P*(–6, –7).

La pendiente es $m=1$, por tanto, la ecuación es: $y+7=x+6 \Rightarrow y=x-1$

79. Obtén la ecuación normal de la recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y tiene por vector director $\vec{v}=(-2,\ 3)$.

La recta tiene vector normal $\vec{n}=(3,\ 2)$, por tanto, su ecuación normal es: $3(x-3)+2(y+1)=0$

80. Obténlas ecuaciones explícitas de las rectas siguientes.

a) Pasa por *A*(–1, 2) y tiene pendiente $m=2$.

b) Pasa por los puntos *A*(–1, 3) y *B*(2, 4).

c) Pasa por *A*(2, 3) y forma con la parte derecha del eje de abscisas un ángulo de 30º.

d) Pasa por *A*(–2, 5) y forma con la parte izquierda del eje de abscisas un ángulo de 120º.

a) $y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4$

b) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,\ 1)$, la ecuación explícita es: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1} \Rightarrow x+1=3y-9 \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

c) La pendiente es $m=$ tg (30º) $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, la ecuación explícita es: $y-3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}$

d) La recta forma un ángulo de 60º con la parte derecha del eje de abscisas, por lo que tiene pendiente $m=$ tg (60º) $=\sqrt{3}$, por tanto, la ecuación explícita es: $y-5=\sqrt{3}(x+2) \Rightarrow y=\sqrt{3}x+\left(2\sqrt{3}+5\right)$.

81. Determina las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta *r* en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $P(-3, 6)$ y es paralela a la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$.

b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(-1, 0)$.

c) Corta al eje de abscisas en el punto $P(2, 0)$ y pasa por el punto $Q(-2, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-6}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 3y - 18 \Rightarrow 2x - 3y + 24 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{2}{3}x + 8$

b) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x - 3$

c) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x + 4y - 4 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Posiciones relativas de rectas

82. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos *P*(1, 2) y *Q*(–1, –7).

Las rectas tienen vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-2, -9)$, por tanto, tienen pendiente $m = \frac{9}{2}$.

83. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(2, 6) y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (2, -1)$, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

84. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

a) $r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = \dfrac{3+t}{2} \\ y = \dfrac{1-t}{2} \end{cases}$

b) $r: 3x - 2y = 7$ $s: 2x - 3y = 8$

c) $r: x + y = 7$ $s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

d) $r:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2-2\lambda \end{cases}$ $s: 4x + y - 8 = 0$

e) $r: y = -2x + 3$ $s: y = \frac{x}{2}$

f) $r: 2x - y - 5 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$

a) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r} = (1, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Como son proporcionales y el punto $P(1, 1)$ pertenece a ambas rectas, las rectas son coincidentes.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

c) La ecuación de s se puede escribir como $x + y - 7 = 0$, que es la misma ecuación de r, por lo que las rectas son coincidentes.

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r} = (1, -2)$ y $\overrightarrow{u_s} = (-1, 4)$. Como no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Las pendientes son $m_r = -2$ y $m_s = \frac{1}{2}$. Como son distintas, las rectas son secantes, y como $m_r \cdot m_s = -1$ son perpendiculares.

f) $\dfrac{2}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}} \neq \dfrac{-5}{-5} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

85. Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes.

a) $r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 1-4\mu \\ y = 2+2\mu \end{cases}$

b) $r: 2x - 5y = -\frac{23}{2}$ $s: 3x - 4y = -12$

c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

d) $r:\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = -2+2\lambda \end{cases}$ $s: 2x - y - 6 = 0$

a) $\begin{cases} 2-3\lambda = 1-4\mu \\ 1+\lambda = 2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ \lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1,\ \mu = -1 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0)$

b) $\begin{cases} 2x - 5y = -\dfrac{23}{2} \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 10y = -23 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow x = -2,\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \\ -\dfrac{x}{8} + \dfrac{2y}{3} + \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -3x + 16y = -36 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{28}{9},\ y = -\frac{5}{3} \Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $2(2-3\lambda) + 2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ El punto de intersección es $P(2, -2)$

86. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas *r*: $2x - 3y + 1 = 0$ y *s*: $4x + y - 3 = 0$ y corta al eje de abscisas en el punto *P*(4, 0).

$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{7},\ y = \frac{5}{7} \Rightarrow$ r y s se cortan en el punto $Q\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right)$. El vector director de la recta buscada es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{24}{7}, \frac{5}{7}\right) \simeq (-24, 5)$, por tanto, su ecuación es: $\frac{x-4}{-24} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 5x - 20 = -24y \Rightarrow 5x + 24y - 20 = 0$

87. Encuentra la ecuación de las siguientes rectas paralelas a una dada.

a) Paralela a $2x + 5y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.

b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por le punto $A(-1, 4)$.

d) Paralela a $r: 2x - y + 12 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralela a $r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.

f) Paralela a $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.

g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.

a) La recta es de la forma $2x + 5y + k = 0$. Como pasa por A, ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x + 5y - 26 = 0$.

b) La recta es $y = 4$.

c) La recta es $x = -1$.

d) La recta es de la forma $2x - y + k = 0$. Como pasa por (0, 0) tenemos $k = 0$. Luego la ecuación es $2x - y = 0$.

e) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 1)$, así, su ecuación es: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x + 2 = 3y - 12 \Rightarrow x - 3y + 14 = 0$.

f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$.

g) La pendiente de la recta es $m = 1$ y la ordenada en el origen $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

88. Obtén la ecuación de las siguientes rectas.

a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.

b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.

c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.

d) Perpendicular a r: $3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Perpendicular a $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.

f) Perpendicular al segmento $\overline{AB}$ con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (1, -2)$, así, su ecuación es: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x + 4 = y + 1 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$.

b) La recta es vertical y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $x = -4$.

c) La recta es horizontal y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $y = 3$.

d) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, -3)$, así, su ecuación es: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow 3x + 3y = 0 \Rightarrow x + y = 0$.

e) La recta tiene vector normal $\vec{n} = (2, 1)$, así, su ecuación es: $2(x + 1) + 1(y - 0) \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$.

f) La recta tiene vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (3, -2)$, así, su ecuación es: $3(x + 3) - 2(y - 2) \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$.

89. En cada caso, calcula el valor del parámetro *k* para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{5}{-k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

90. Halla para qué valor de *b*, la recta $x - by = -4b - 1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 4) y *Q*(2, 3).

La recta dada debe pasar por *P* y *Q*, luego $\begin{cases} -1-4b = -4b-1 \\ 2-3b = -4b-1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$, así, la recta es $x + 3y - 11 = 0$.

91. Halla el valor de *k* para que sean paralelas las rectas $r: (2k - 2)x - y + 2k = 0$ y $s: (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$. Para los valores hallados, obtén la ecuación de la recta paralela a *r* y *s* que pasa por el origen de coordenadas.

Para que sean paralelas tiene que suceder que $\frac{2k-2}{k-1} = \frac{-1}{k+1} \Rightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -\frac{3}{2}$.

En el primer caso la recta paralela que pasa por el origen es $y = 0$, en el segundo caso es $5x + y = 0$.

92. Dadas las rectas:

$r: (k - 1)x - 2y + 2k = 0$ $s: (3k - 4)x + y + k^2 = 0$

Encuentra los valores de *k* para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{u_r} = (2,\ k-1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1,\ 4-3k)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$2 + (k-1)(4-3k) = 0 \Rightarrow -3k^2 + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3},\ k = 2$$

Para $k = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} r: \frac{-2}{3}x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \\ s: -3x + y + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 27x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{15}, y = \frac{13}{45}$. El punto de intersección es $P\left(\frac{2}{15}, \frac{13}{45}\right)$.

Para $k = 2$, $\begin{cases} r: x - 2y + 4 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-12}{5}, y = \frac{4}{5}$. El punto de intersección es $P\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

93. Halla los valores de *m* y *n* para que sean perpendiculares las rectas $r: x - my + 2n = 0$ y $s: 2mx + ny + 1 = 0$, sabiendo que el punto *P*(0, 2) pertenece a la recta *r*. Para los valores hallados, encuentra el punto de intersección de *r* y *s*.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{u_r} = (m,\ 1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (-n,\ 2m)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$\begin{cases} -mn + 2m = 0 \\ -2m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n = 0 \text{ Imposible} \\ m = n = 2 \end{cases}$$

El punto *P* de intersección es: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Haz de rectas

94. Calcula la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto *P*(–2, 3). Encuentra la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

La ecuación del haz es $y - 3 = m(x + 2)$.Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$.

95. Determina la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r*: *y* = 2*x* – 3 y *s*: *y* = 3*x* – 5 y halla su vértice y la recta de este haz que pasa por el punto *P*(–2, 2).

La ecuación del haz es: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$. Vértice: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

Si la recta pasa por *P*, se tiene que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$. Por tanto, la recta buscada es:

$$2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$$

96. Halla la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r* : 2*x* + *y* = 0 y *s* : 3*x* – 2*y* = 0 y calcula su vértice y la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

La ecuación del haz es: $2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0$. Vértice: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

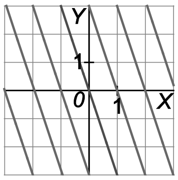
La recta buscada tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por *V*, por tanto, su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x + 3y = 0$.

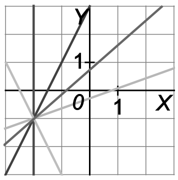
97. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas paralelas a la recta de ecuación *r* : –2*x* + 3*y* – 5 = 0 y elige, de entre ellas, la que pasa por *P*(–1, 3).

Todas las rectas paralelas a la dada son de la forma $-2x + 3y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $2 + 9 + K = 0 \Rightarrow K = -11$, por tanto, su ecuación es: $-2x + 3y - 11 = 0$.

98. Determina las ecuaciones de los haces de las siguientes figuras.

a) 

b) 

Halla en cada uno de los haces anteriores la recta que pasa por el punto *P*(–1, –2)

a) Es un haz de rectas paralelas de pendiente $m = -3$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-3 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 5$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + 5 = 0$.

b) Es un haz de rectas secantes de vértice *V*(–2, –1), por tanto, su ecuación es: $y + 1 = m(x + 2)$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-2 + 1 = m(-1 + 2) \Rightarrow m = -1$, por tanto, su ecuación es:

$y + 1 = -(x + 2) \Rightarrow x + y + 3 = 0$.

99. Encuentra la expresión que representa a todas las rectas que tienen pendiente $m = -2$ y di cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas con pendiente $m = -2$ son de la forma $y = -2x + n$. La que pasa por el origen tiene ecuación $y = -2x$.

100. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas perpendiculares a $r: 3x - 2y + 12 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(1, -1)$.

La pendiente de r es $m = \frac{3}{2}$, por tanto, las rectas perpendiculares a r tienen pendiente $m = -\frac{2}{3}$, es decir, son de la forma $y = -\frac{2}{3}x + n$. La que pasa por P verifica $-1 = -\frac{2}{3} + n \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$, por tanto su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Distancias y ángulos

101. Calcula la distancia entre los puntos A y B:

a) $A(2, -3)$ y $B(-2, 5)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ y $B\left(\frac{3}{5}, -3\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u

b) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

c) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ u

d) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1609}{900}} = \frac{\sqrt{1609}}{30}$ u

102. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$ y $s: 2x + y - 3 = 0$.

Punto de intersección A: $2 - 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A(1, 1)$. Por tanto, $d(A, P) = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$ u

103. Halla el perímetro del romboide determinado por las siguientes rectas.

a) $x + 4y - 9 = 0$ **b)** $x - y - 4 = 0$ **c)** $x + 4y - 6 = 0$ **d)** $x - y + 6 = 0$

Observemos que a y c son paralelas, igual que b y d, por tanto, es un paralelogramo. Los vértices son:

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 1 \Rightarrow A(5, 1)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{18}{5},\ y = \frac{12}{5} \Rightarrow C\left(-\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = 3 \Rightarrow B(-3, 3)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{22}{5},\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow D\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$

El perímetro es $2(d(A, B) + d(B, C)) = 2\left(\sqrt{64+4} + \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}}\right) = 2\left(2\sqrt{17} + \frac{3}{5}\sqrt{2}\right) \simeq 18{,}19$ u

104. Halla la distancia del punto *P*(–4, 3) al punto medio del segmento de extremos *A*(1, –3) y *B*(–1, 2).

El punto medio del segmento es $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, por tanto, $d(P, M) = \sqrt{16 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$ u

105. Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r* en los siguientes casos.

a) $P(-3, 4)$ r: $2x + 3y - 5 = 0$ **c)** $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ r: $2x - 2y = -3$

b) $P(0, -2)$ r: $y = -2x + 5$ **d)** $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1, 0)$ y r es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $B\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

f) $P(3, -2)$ y r es la recta que forma un ángulo de 45º con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a –2.

a) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ u

b) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ u

c) $d(P, r) = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot (-3) + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u

d) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow -x + 1 = y + 2 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|1 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$

e) $\frac{x - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2}} = \frac{y + 3}{\frac{1}{2} + 3} \Rightarrow 14x + 10y + 23 = 0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|14 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 + 23|}{\sqrt{14^2 + 10^2}} = \frac{9}{\sqrt{296}} = \frac{9\sqrt{74}}{148}$ u

f) La pendiente de r es $m = 1$, y la ordenada en el origen es $n = -2$, por tanto, su ecuación es $y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$ y $d(P, r) = \frac{|3 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ u

106. Comprueba que los siguientes pares de rectas son paralelas y calcula, en cada caso, la distancia que las separa.

a) $r: 2x - y = 7$ s: $2x - y = 8$ **b)** $r: 2x - 3y - 2 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$ **c)** $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases}$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-7 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ u

b) s: $-\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$. $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ u

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases} \Rightarrow x - 3 = 3 - 2y \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{-8}{-6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-8 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ u

107. Calcula las medidas de sus tres lados y clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$ y $C(5, -3)$ **c)** $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ y $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u $d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

$d(A, C) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u Es un triángulo isósceles.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ u $d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u

$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ u Es un triángulo escaleno.

c) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ u $d(B, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u

$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u Es un triángulo equilátero.

108. Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices: $A(-2, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(3, 4)$

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$ u , $d(B, C) = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ u y $d(A, C) = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ u .

Por tanto, el perímetro es $P = \sqrt{58} + 2\sqrt{29}$ u .

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a la recta determinada por el segmento AB, de ecuación:

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow -3x - 6 = 7y - 14 \Rightarrow 3x + 7y - 8 = 0$$

Por tanto, la altura es $d(C, AB) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) + 8|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{29}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$ u y el área es $S = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{\sqrt{58}}{2}}{2} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2}$ u^2

109. Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$

$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$

$$t: 2x + y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow A(2, 1) \qquad \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = 0 \Rightarrow B(-1, 0)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$$

Por tanto, el perímetro es $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) = \sqrt{9+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$ u

110. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x+y=1$ y $s: x-y=3$

b) $r: x-2y-2=0$ y $s: -x-y-2=0$

c) $r: y=-x+2$ y $s: y=-\frac{1}{2}-3x$

d) $r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \end{cases}$

e) $r: 2x-y-7=0$ y $s: \begin{cases} x=3 \\ y=2+\lambda \end{cases}$

a) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1}=(3,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,-1)$, luego $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\alpha=63{,}43^\circ$

b) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-1,-1)$, luego $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=71{,}57^\circ$

c) Las pendientes son $m_1=-1$ y $m_2=-3$, luego $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|m_1-m_2|}{|1+m_1m_2|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=26{,}57^\circ$

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_1}=(2,-2)$ y $\overrightarrow{u_2}=(-2,1)$. Luego $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=18{,}43^\circ$

e) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1}=(2,-1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,0)$. Luego $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\alpha=26{,}57^\circ$

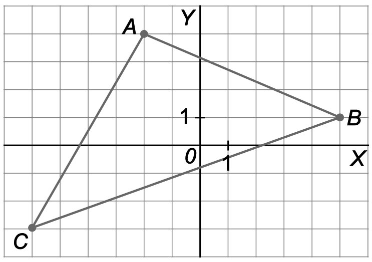
111. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que forman las rectas $r: 3x+4y=12$ y $s: 5x+6y=30$ con los ejes coordenados.

Los vértices del cuadrilátero son $A(4, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 5)$ y $D(0, 3)$.

El perímetro es $P=d(A,B)+d(B,C)+d(C,D)+d(D,A)=\sqrt{4+0}+\sqrt{36+25}+\sqrt{0+4}+\sqrt{16+9}=9+\sqrt{61}$ u.

El área se calcula restando las áreas de los triángulos rectángulos *OBC* y *OAD*: $S=15-6=9$ u^2.

112. Halla el perímetro del triángulo formado por los puntos medios de los lados del triángulo de la figura.



$A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ y $C(-6, -3)$, de modo que los puntos medios de los lados son $M_1\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ y $M_3\left(-4,\frac{1}{2}\right)$, por tanto, el perímetro pedido es:

$$P=d(M_1,M_2)+d(M_2,M_3)+d(M_3,M_1)=\sqrt{4+\frac{49}{4}}+\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{121}{4}+4}=\frac{\sqrt{65}+\sqrt{58}+\sqrt{137}}{2}\text{ u}$$

Otra forma de hacerlo sería:

$$P=\frac{1}{2}\text{Perímetro}(ABC)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{7^2+(-3)^2}+\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}+\sqrt{(-11)^2+(-4)^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{58}+\sqrt{65}+\sqrt{137}\right]$$

113. Calculando las medidas de sus tres ángulos, clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(5, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(7, 0)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(-4, -3)$ y $C(2, -1)$ **c)** $A(-2, 8)$, $B(-6, 1)$ y $C(0, 4)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-4, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -3) \Rightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{17}\sqrt{13}} = -\dfrac{5\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{A} = 109{,}65º$

$\overrightarrow{BA} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (6, -2) \Rightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{22}{\sqrt{17}\sqrt{40}} = \dfrac{11\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{B} = 32{,}47º$

$\overrightarrow{CA} = (-2, 3)$ y $\overrightarrow{CB} = (-6, 2) \Rightarrow \cos\hat{C} = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{18}{\sqrt{13}\sqrt{40}} = \dfrac{9\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{C} = 37{,}87º$

Es un triángulo obtusángulo.

b) $\overrightarrow{AB} = (-5, -5)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -3) \Rightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{10}{\sqrt{50}\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{A} = 63{,}43º$

$\overrightarrow{BA} = (5, 5)$ y $\overrightarrow{BC} = (6, 2) \Rightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{40}{\sqrt{50}\sqrt{40}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} = 26{,}57º$

$\overrightarrow{CA} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{CB} = (-6, -2) \Rightarrow \cos\hat{C} = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{0}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90º$

Es un triángulo rectángulo.

c) $\overrightarrow{AB} = (-4, -7)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -4) \Rightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{20}{\sqrt{65}\sqrt{20}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{A} = 56{,}31º$

$\overrightarrow{BA} = (4, 7)$ y $\overrightarrow{BC} = (6, 3) \Rightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{45}{\sqrt{65}\sqrt{45}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{B} = 33{,}69º$

$\overrightarrow{CA} = (-2, 4)$ y $\overrightarrow{CB} = (-6, -3) \Rightarrow \cos\hat{C} = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{0}{\sqrt{20}\sqrt{45}} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90º$

Es un triángulo rectángulo.

114. Calcula las coordenadas de los vértices y la medida de los ángulos del triángulo determinado por las siguientes rectas. Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.

$$\boldsymbol{r: 3x + 2y - 3 = 0}$$

$$\boldsymbol{s: 2x - y - 2 = 0}$$

$$\boldsymbol{t: x + 2y + 9 = 0}$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0) \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(6, -\dfrac{15}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -4)$$

Los vectores normales son: $\vec{n}_r = (3, 2)$, $\vec{n}_s = (2, -1)$, $\vec{n}_t = (1, 2)$

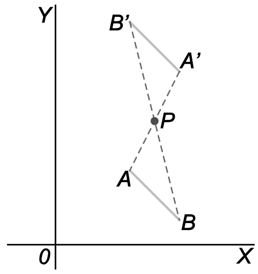
Las rectas s y t son perpendiculares pues: $2\cdot 1 + (-1)2 = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90º$

Los otros ángulos son: $\cos\hat{A} = \dfrac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_s}{|\vec{n}_r||\vec{n}_s|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{A} = 60{,}26º$ $\cos\hat{B} = \dfrac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_t}{|\vec{n}_r||\vec{n}_t|} = \dfrac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}} \Rightarrow \hat{B} = 29{,}74º$

Por tener los ángulos distintos es escaleno, además, es un triángulo rectángulo.

Puntos y rectas simétricos

115. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría central de centro *P* siendo: *A*(2, 3), *B*(4, 1) y *P*(3, 5).



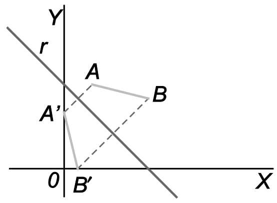
P ha de ser el punto medio de *A* y *A'*, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a_1}{2} = 3 \Rightarrow a_1 = 4 \\ \dfrac{3+a_2}{2} = 5 \Rightarrow a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$

Análogamente, *P*ha de ser el punto medio de *B* y *B'*, luego si $B'(b_1, b_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{4+b_1}{2} = 3 \Rightarrow b_1 = 2 \\ \dfrac{1+b_2}{2} = 5 \Rightarrow b_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$

116. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría axial de eje *r* siendo: *A*(1, 3), $B\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ y $r: x + y = 3$.



La recta que pasa por *A* y *A'*es perpendicular a *r*, por tanto, es de la forma $x - y + k = 0$ y, como pasa por *A*, se tiene $1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2$, con lo que la ecuación de la recta *AA'* es $x - y + 2 = 0$.

El punto de intersección de esta recta y *r* es: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{5}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{1+a_1}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \\ \dfrac{3+a_2}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(0, 2)$$

Siguiendo un proceso análogo para el punto *B* se tiene:

$$BB': x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0$$

Punto de intersección: $\begin{cases} x - y - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{7}{4},\ y = \dfrac{5}{4} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

Calculo de $B'(b_1, b_2)$: $\begin{cases} \dfrac{3+b_1}{2} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\frac{5}{2}+b_2}{2} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

117. Dada las rectas $r: x-4y+2=0$ y $s: 2x-3y=-4$:

a) Calcula su punto de corte.

b) Demuestra que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r.

c) Calcula la ecuación de la simétrica de la recta s respecto de la recta r.

a) El punto de corte es: $\begin{cases} x-4y+2=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

b) P verifica la ecuación de s. En efecto: $2\cdot 1-3\cdot 2+4=2-6+4=0 \Rightarrow P\in s$.

La recta perpendicular a r que pasa por P es: $4x+y+k=0 \Rightarrow 4+2+k=0 \Rightarrow k=-6 \Rightarrow 4x+y-6=0$.

Dicha recta corta a r en el punto: $\begin{cases} 4x+y-6=0 \\ x-4y+2=0 \end{cases} \Rightarrow M=\left(\dfrac{22}{17}, \dfrac{14}{17}\right)$

M es el punto medio de P y su simétrico $P'(a, b)$, luego: $\begin{cases} \dfrac{1+a}{2}=\dfrac{22}{17} \Rightarrow a=\dfrac{27}{17} \\ \dfrac{2+b}{2}=\dfrac{14}{17} \Rightarrow b=-\dfrac{6}{17} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\dfrac{27}{17}, -\dfrac{6}{17}\right)$

c) La recta pasa por Q y P', por tanto su ecuación es: $\dfrac{x+2}{61}=\dfrac{y}{-6} \Rightarrow -6x-12=61y \Rightarrow 6x+61y+12=0$.

Lugares geométricos

118. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

a) Determina las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

b) Halla las coordenadas del punto que equidista de A, B y C.

a) Mediatriz del segmento $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=x^2+6x+9+y^2 \Rightarrow x+y-1=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{AC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=x^2-6x+9+y^2+4y+4 \Rightarrow x-3y+1=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \Rightarrow x^2+6x+9+y^2=x^2-6x+9+y^2+4y+4 \Rightarrow 3x-y-1=0$$

b) El punto que equidista de A, B y C, el circuncentro, se obtiene como punto de intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

119. Halla las bisectrices de las rectas $r: 3x-2y=-2$ y $s: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

Ecuación general de la recta s. $\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{2}=y-1 \Rightarrow x-2y+2=0$

Ecuaciones de las bisectrices:

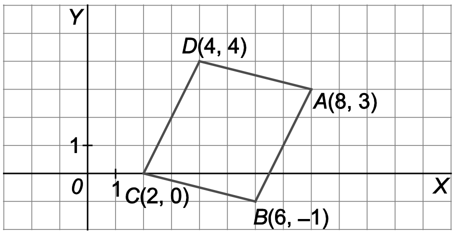
$$\frac{|3x-2y+2|}{\sqrt{13}}=\frac{|x-2y+2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3x-2y+2}{\sqrt{13}}=\pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: \left(3\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)x+\left(2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)y+\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{13}\right)=0 \\ b_2: \left(3\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{13}+2\sqrt{5}\right)y+\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{13}\right)=0 \end{cases}$$

Los vectores normales y, por tanto, las bisectrices, son perpendiculares, ya que:

$$\left(3\sqrt{5}-\sqrt{13}, 2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{13}, -2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)=45-13-52+20=0$$

Síntesis

120. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura, y comprueba si se trata o no de un rombo.



La diagonal AC tiene vector director $\overrightarrow{AC} = (-6, -3) \simeq (2, 1)$ y pasa por A, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-8 = 2y-6 \Rightarrow x-2y-2=0$$

La diagonal BD tiene vector director $\overrightarrow{BD} = (-2, 5)$ y pasa por B, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x-30 = -2y-2 \Rightarrow 5x+2y-28=0$$

No se trata de un rombo, ya que las diagonales no son perpendiculares. En efecto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 12-15 = -3 \neq 0$

121. Dado el triángulo de vértices: $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(0, -3)$

a) Calcula las coordenadas del baricentro.

b) Halla las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro.

c) Obtén las ecuaciones de dos mediatrices y las coordenadas del circuncentro.

d) Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

e) Encuentra la ecuación de la recta de Euler y comprueba que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados.

a) El baricentro es $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) La altura por A es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (1, -5)$, así, su ecuación es: $1(x-1)-5(y-3) \Rightarrow x-5y+14=0$.

La altura por B es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-1, -6)$, así, su ecuación es: $-1(x+1)-6(y-2) \Rightarrow x+6y-11=0$.

El ortocentro es el punto de intersección de estas alturas: $H\left(-\frac{29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatriz del lado AB: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow 4x+2y-5=0$

Mediatriz del ladoAC: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} \Rightarrow 2x+12y-1=0$

El circuncentro es el punto de intersección de estas mediatrices: $T\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

d) El radio de la circunferencia circunscrita es $d(T, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22}-1\right)^2+\left(-\frac{3}{22}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{2405}{242}} \approx 3{,}15$ u

e) $\overrightarrow{GH} = \left(-\frac{29}{11}, \frac{53}{33}\right)$ y $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{29}{22}, -\frac{53}{66}\right)$ son proporcionales, por tanto, el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que pasa por ellos es la recta de Euler, de ecuación:

$$\frac{x-0}{-\frac{29}{11}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{53}{33}} \Rightarrow 53x+87y-58=0$$

122. Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(–1, 2) y *C*(3, 0). Calcula las coordenadas del incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

Bisectriz interior por *A*: $2x - y - 1 = 0$

Bisectriz interior por *B*: $\left(\sqrt{2}-1\right)x + \left(2\sqrt{2}+3\right)y - \left(7+3\sqrt{2}\right) = 0$

Bisectriz interior por *C*: $\left(3+\sqrt{2}\right)x + \left(1+2\sqrt{2}\right)y - \left(9+3\sqrt{2}\right) = 0$

El incentro es el punto de intersección de dos bisectrices: $I\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-1\right)$

El radio de la circunferencia inscrita es $d(I, AB) = \dfrac{\left|\sqrt{2}-3(2\sqrt{2}-1)+7\right|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}93$ u (La recta *AB* tiene ecuación $x - 3y + 7 = 0$)

123. Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2), *B*(3, –4) y *C*(3, 5), y los puntos exteriores *D*(5, –3) y *E*(5, 3),

a) Demuestra que el segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) Demuestra que el segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) Si *M* es el punto medio de D y E y *G* es el baricentro del triángulo, demuestra que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Comprueba que *G* es el punto medio de *A* y *M*.

a) $\overrightarrow{BD} = (2, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (6, 3)$ verifican que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BD}$, por lo queel segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) $\overrightarrow{CE} = (2, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (6, -6)$ verifican que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CE}$, por lo queel segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) $M(5, 0)$ y $G(1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{AM} = (8, -2)$ son proporcionales, por lo que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Como $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$, *G* es el punto medio de *A* y *M*.

124. Dado el cuadrilátero de vértices *A*(1, 1), *B*(5, 2), *C*(3, 3) y $D\left(1, \frac{5}{2}\right)$:

a) Demuestra que se trata de un trapecio.

b) Calcula el punto donde se cortan las diagonales.

c) Comprueba que la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos es paralela a las bases del trapecio.

a) Los lados *AB* y *DC* son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ son proporcionales.

Los lados *AD* y *BC* no son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AD} = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2, 1)$ no son proporcionales.

Por tanto, el cuadrilátero es un trapecio de bases *AB* y *DC*.

b) La diagonal *AC* tiene ecuación: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow x - y = 0$ y la *BD*: $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x + 8y - 21 = 0$.

Punto de corte: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 8y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{7}{3},\ y = \dfrac{7}{3} \Rightarrow P\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

c) $R\left(1, \frac{7}{4}\right)$ y $S\left(4, \frac{5}{2}\right)$ son los puntos medios de *AD* y *BC*, respectivamente.La recta *RS* es paralela a los lados *AB* y *DC*, ya que los vectores $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$, $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{RS} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$ son proporcionales.

125. Se considera el cuadrilátero de vértices: $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$, $C(5, -8)$ **y** $D(-7, -6)$

a) Calcula la medida de las dos diagonales.

b) Comprueba que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.

c) Calcula el perímetro del paralelogramo.

d) Comprueba que el perímetro hallado coincide con la suma de las dos diagonales del cuadrilátero inicial.

a) $d(A,C) = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ u $\qquad d(B,D) = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ u

b) Punto medio del lado AB: $M_1(-1, 1)$ $\qquad$ Punto medio del lado BC: $M_2(4, -3)$

Punto medio del lado CD: $M_3(-1, -7)$ $\qquad$ Punto medio del lado DA: $M_4(-6, -3)$

Como $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_2M_3} = (-5, -4)$, $M_1M_2M_3M_4$ es un paralelogramo.

c) El perímetro es $2d(M_1, M_2) + 2d(M_2, M_3) = 2\sqrt{5^2 + (-4)^2} + 2\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{41}$ u

d) La suma de las diagonales es $d(A,C) + d(B,D) = 4\sqrt{41}$, que coincide con el perímetro del paralelogramo.

126. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo ***ABC*** **sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son:** $M(-2, 2)$, $N(5, 3)$ **y** $P(2, -2)$**.**

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. Se debe verificar que:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + b_1}{2} = -2 \\ \dfrac{a_1 + c_1}{2} = 5 \\ \dfrac{b_1 + c_1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = -4 \\ a_1 + c_1 = 10 \\ b_1 + c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1,\ b_1 = -5,\ c_1 = 9 \qquad \begin{cases} \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 2 \\ \dfrac{a_2 + c_2}{2} = 3 \\ \dfrac{b_2 + c_2}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 4 \\ a_2 + c_2 = 6 \\ b_2 + c_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 7,\ b_2 = -3,\ c_2 = -1$$

Por tanto, $A(1, 7)$, $B(-5, -3)$ y $C(9, -1)$.

127. Halla el punto de la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ **que equidista de los puntos** $A(2, 2)$ **y** $B(-2, 4)$**.**

El punto buscado será la intersección de la recta r con la mediatriz del segmento AB.

La mediatriz del segmento AB es: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$.

El punto de intersección es: $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = 1 \Rightarrow P(-1, 1)$

128. Calcula los puntos de la recta $r: x + y - 3 = 0$ **que están a distancia 1 del punto** $P(1, 1)$**.**

Los puntos de la recta son de la forma $(t, 3 - t)$, para que estén a distancia 1 de P se debe verificar:

$\sqrt{(t-1)^2 + (2-t)^2} = 1 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$ Se obtienen así dos soluciones, $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$.

129. Determina las rectas que pasan por el punto $P(1, 2)$ **y que forman con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes un ángulo de 45º.**

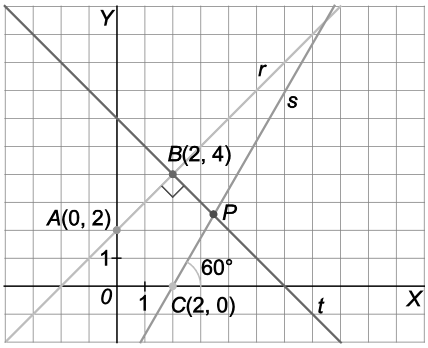
Las rectas no verticales buscadas son del tipo $y - 2 = m(x - 1)$.

Como la pendiente de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes es 1, tenemos:

$\operatorname{tg} 45^\circ = \left|\dfrac{m-1}{1+m}\right| \Rightarrow \dfrac{m-1}{m+1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = m + 1 \Rightarrow 0 = 2 \text{ Imposible} \\ m - 1 = -m - 1 \Rightarrow m = 0 \end{cases}$. Por tanto, la recta buscada es $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$.

Además, la recta vertical $x = 1$ también forma un ángulo de 45º con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

130. A partir de la información de la figura, calcula:



a) Las ecuaciones de las rectas *r*, *s* y *t*.

b) El punto *P* de intersección entre *s* y *t*.

c) El punto *P′* simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

d) El punto *C′* simétrico de *C* respecto de la recta *r*.

e) El perímetro del cuadrilátero *PCC′P′*.

f) La ecuación de la recta *s′* simétrica de *s* respecto de la recta *r*.

g) El ángulo que forman *s* y *t*.

h) La recta paralela a *s* que pasa por *B*.

i) Las rectas que pasan por el punto *D*(–1, 3) y forman un ángulo de 30º con la recta *r*.

a) $r: \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow x-y+2=0$ $s: y-0 = \text{tg}\,60°(x-2) \Rightarrow y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ $t: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-4}{2} \Rightarrow x+y-6=0$

b) $\begin{cases} y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3} \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = 2\sqrt{3} \\ y=6-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(2\sqrt{3},\, 6-2\sqrt{3}\right).$

c) La perpendicular a *r* por *P* es *t*, que corta a *r* en *B*. Por tanto, *B* debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, con lo que $P'\left(4-2\sqrt{3},\, 2+2\sqrt{3}\right)$.

d) La perpendicular a *r* por *C* tiene ecuación $x+y-2=0$ y corta a *r* en el punto *A*, con lo que *A* debe ser el punto medio del segmento $\overline{CC'}$ y, por tanto, $C'(-2, 4)$.

e) $d(P,C)+d(C,C')+d(C',P')+d(P',P) = \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2+\left(-6+2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{(-4)^2+4^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2+\left(-2+2\sqrt{3}\right)^2}+$

$+\sqrt{\left(-4+4\sqrt{3}\right)^2+\left(4-4\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{3}+4\sqrt{6}-8 \simeq 15{,}65$ u

f) La recta buscada pasa por *P′* y *C′*, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{y-4}{-2-2\sqrt{3}} \Rightarrow \left(2+2\sqrt{3}\right)x+\left(6-2\sqrt{3}\right)y+\left(-20+12\sqrt{3}\right)=0$$

g) Los vectores normales de *s* y *t* son, respectivamente, $\vec{n_1}=\left(\sqrt{3},\,-1\right)$ y $\vec{n_2}=(1, 1)$, por tanto, el ángulo que forman es: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha = 75°$

h) Como la pendiente de *s* es $m=\sqrt{3}$, la recta paralela a *s* que pasa por *B* tiene ecuación:

$$y-4=\sqrt{3}(x-2) \Rightarrow y=\sqrt{3}x+\left(4-2\sqrt{3}\right)$$

i) La recta *r* tiene pendiente 1, luego forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas. Las rectas que forman un ángulo de 30º con la recta *r* tienen que formar, por tanto, ángulos de 15º o de 75º con la parte positiva del eje de abscisas.

Por tanto, sus pendientes han de ser $m_1 = \text{tg}\,15° = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$ y $m_2 = \text{tg}\,75° = \dfrac{\text{tg}\,30°+\text{tg}\,45°}{1-\text{tg}\,30°\,\text{tg}\,45°} = 2+\sqrt{3}$.

De este modo, las rectas buscadas tienen ecuación:

$y-3=\left(2-\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+\left(5-\sqrt{3}\right)$ $\quad y-3=\left(2+\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y=\left(2+\sqrt{3}\right)x+\left(5+\sqrt{3}\right)$

131. Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x+2y-2=0$ y que distan 2 unidades de la recta $s: 4x-3y+13=0$.

Los puntos de *r* son de la forma $(2-2t,\ t)$, para que disten 2 unidades de *s* deben verificar:

$$\frac{|4\cdot(2-2t)-3t+13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\Rightarrow 21-11t=\pm 10\Rightarrow\begin{cases}21-11t=10\Rightarrow t=1\Rightarrow P_1(0,\ 1)\\ 21-11t=-10\Rightarrow t=\dfrac{31}{11}\Rightarrow P_2\left(-\dfrac{40}{11},\ \dfrac{31}{11}\right)\end{cases}$$

132. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$r:\begin{cases}x=-3+5\lambda\\ y=3\lambda\end{cases}\quad s:\begin{cases}x=7-7\lambda\\ y=4\lambda+6\end{cases}$$

y que forma un ángulo de 45º con la recta que une los puntos $A(0,\ 5)$ y $B(5,\ 0)$.

El punto de intersección de las rectas es el $P(7,\ 6)$, que se obtiene para $\lambda=2$ en la primera recta y $\lambda=0$ en la segunda.

La recta que une *A* y *B* es $y=-x+5$, que forma 45º con los ejes de coordenadas. Por tanto hay dos soluciones al problema planteado: La recta horizontal que pasa por *P*, de ecuación $y=6$, y la recta vertical que pasa por *P*, de ecuación $x=7$.

CUESTIONES

133. ¿Existe algún valor de *a* para el que los puntos $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 1)$ y $B(1,\ a)$ pertenezcan a una misma recta?

Para que los puntos *A*, *B* y *C* pertenezcan a una misma recta es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{OA}=(1,\ 1)$ y $\overrightarrow{OB}=(1,\ a)$ tengan la misma dirección, es decir, sean proporcionales. Por tanto:

$\frac{1}{1}=\frac{1}{a}\Rightarrow a=1\Rightarrow$ Para $a=1$, los puntos *O*, *A* y *B* están alineados, de hecho, *A* y *B* son iguales.

134. a) Indica un vector de dirección y otro normal a la recta que tiene por ecuación explícita: $y=mx+n$

b) Indica un vector de dirección y otro normal de la recta que tiene por ecuación punto–pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$

a) Vector de dirección $\vec{u}=(1,\ m)$ Vector normal $\vec{n}=(m,\ -1)$

b) Vector de dirección $\vec{u}=(1,\ m)$ Vector normal $\vec{n}=(m,\ -1)$

135. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Si la distancia de un punto a una recta es cero entonces obligatoriamente el punto está contenido en la recta.

b) Si la ecuación general de una recta no tiene término independiente entonces el origen de coordenadas pertenece a la recta.

c) La expresión $Ax+By+C=0$ representa siempre una recta independientemente de los valores reales de *A*, *B* y *C*.

a) Cierta, si la recta es $r: Ax+By+C=0$ y el punto es $P(a,b)$, al ser $d(P,r)=0$, se verifica que $|Aa+Bb+C|=0\Rightarrow Aa+Bb+C=0$, lo que significa que *P* verifica la ecuación de *r*, es decir, *P* pertenece a la recta.

b) Cierta, si la recta es $r: Ax+By=0$, claramente el origen de coordenadas $O(0,\ 0)$ verifica la ecuación de *r*, es decir, pertenece a *r*.

c) Falsa. Si $A=B=0$ la expresión no representa a ninguna recta.

136. Indica el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

a) Equidistan de dos rectas paralelas

b) La distancia a una recta fija sea 3 unidades de longitud.

c) Equidistan de los tres vértices de un triángulo.

d) Equidistan de los tres lados de un triángulo.

a) La recta paralela a ambas y que está a igual distancia de una y de otra.

b) Dos rectas paralelas a la dada (una a cada lado)y que estén a distancia 3 de ella.

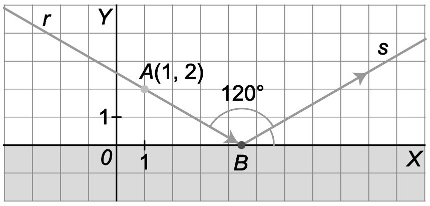
c) El circuncentro del triángulo (punto de intersección de las tres mediatrices).

d) El incentro del triángulo (punto de intersección de las tres bisectrices).

PROBLEMAS

137. Un rayo de luz *r*, que pasa por el punto *A*(1, 2), incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 30º.

Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.



El rayo incidente pasa por *A* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150º, por tanto su pendiente es $m = \text{tg}150º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *A*, tenemos: $2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

Para calcular la ecuación del rayo reflejado observemos que el rayo incidente corta el eje de abscisas en $B\left(1+2\sqrt{3},\, 0\right)$, por tanto, el rayo reflejado pasa por *B* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 30º, con lo que su pendiente es $m = \text{tg}30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *B*, tenemos: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2\sqrt{3}\right) + n \Rightarrow n = -\frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

138. Calcula el valor de *k* para que el área del triángulo de vértices *A*(4, 3), *B*(6, –3) y *C*(6, *k*) sea 20 u^2.

La recta que pasa por *A* y por *B* tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 12 = -y + 3 \Rightarrow 3x + y - 15 = 0$.

La altura por *C* mide $h = d(C, AB) = \frac{|18+k-15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3+k|}{\sqrt{10}}$ u y la base mide $d(A,B) = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u, por tanto, tenemos: $S = \pm\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{3+k}{\sqrt{10}} = \pm(3+k) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3+k = 20 \Rightarrow k = 17 \\ -3-k = 20 \Rightarrow k = -23 \end{cases}$

139. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos *A*(0, 3) y *C*(4, 0).

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?

b) ¿Cuál es el área del cuadrado?

a) La diagonal del cuadrado está sobre la recta *AC*: $3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mide $d(A,C) = \sqrt{25} = 5$ u y su punto medio es $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sea *P*(*a*, *b*) uno de los vértices, *MP* es perpendicular a *AC*, luego es de la forma $(3\lambda, 4\lambda)$.

Además, $d(M,P) = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

Obtenemos así los dos vértices faltantes:

$$\overrightarrow{MP} = \left(a-2,\ b-\frac{3}{2}\right) = (3\lambda,\ 4\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2},\ b = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del lado del cuadrado: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u.

Por tanto el área del cuadrado es $S = l^2 = \frac{25}{2}$ u^2

140. En el paralelogramo de vértices *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(0, 3), *B*(1, 0) y *C*(6, 1). Calcula la medida de sus diagonales y el ángulo que forman.

Si $D(a, b)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6-a, 1-b) \Rightarrow a = 5,\ b = 4 \Rightarrow D(5, 4)$

Las diagonales miden: $d(A,C) = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u y $d(B,D) = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ u

El ángulo que forman es: $\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{|24-8|}{2\sqrt{10}4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43º$

141. Del cuadrado *ABCD*, se conocen las coordenadas del punto *A*(8, 7) y que los puntos *B* y *C* pertenecen a la recta de ecuación $3x-4y=19$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices?

b) Halla el perímetro y el área del cuadrado.

a) *AB* es perpendicular a $3x-4y=19$ y pasa por *A*, por tanto, su ecuación es: $4x+3y-53=0$

Estas dos rectas se cortan en *B*: $\begin{cases}3x-4y-19=0\\4x+3y-53=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{269}{25},\frac{83}{25}\right)$

Los puntos de la recta $3x-4y=19$ son de la forma $\left(\frac{269}{25}+4\lambda,\frac{83}{25}+3\lambda\right)$. Por otra parte, $d(B,C)=d(A,B)$, por tanto tenemos dos posibilidades para el vértice *C*:

$$\sqrt{(4\lambda)^2+(3\lambda)^2}=\sqrt{\left(\frac{69}{25}\right)^2+\left(-\frac{92}{25}\right)^2}\Rightarrow 5|\lambda|=\frac{23}{5}\Rightarrow\lambda=\pm\frac{23}{25}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\left(\frac{361}{25},\frac{152}{25}\right)\\C_2=\left(\frac{177}{25},\frac{14}{25}\right)\end{cases}$$

Por último, el vértice D_1 (asociado a C_1) es el simétrico de *B* respecto del punto medio M_1 de AC_1:

$$M_1=\left(\frac{561}{50},\frac{327}{50}\right)\Rightarrow D_1\left(\frac{292}{25},\frac{244}{25}\right)$$

Análogamente se obtiene el vértice D_2 asociado a C_2: $M_2=\left(\frac{377}{50},\frac{189}{50}\right)\Rightarrow D_2\left(\frac{108}{25},\frac{106}{25}\right)$

b) Aunque obtenemos dos posibles cuadrados en el apartado anterior, en ambos la longitud del lado es $l=d(A,B)=\frac{23}{5}$ u, por tanto el perímetro es $P=4l=\frac{92}{5}$ u y el área es $S=l^2=\frac{529}{25}$ u^2.

142. Calcula el valor de *k* para que la recta $x+y=k$ forme con los ejes coordenados un triángulo que verifique que su área es 5 u^2.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k,0)$ y $(0,k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$. Así, $k=\pm\sqrt{10}$.

143. Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas dadas.

$$r: x+3y=14$$
$$s: 3x-5y=4$$
$$t: 2x-y=-7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases}x+3y=14\\3x-5y=4\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{41}{7},\frac{19}{7}\right)\quad\begin{cases}3x-5y=4\\2x-y=-7\end{cases}\Rightarrow B\left(-\frac{39}{7},-\frac{29}{7}\right)\quad\begin{cases}x+3y=14\\2x-y=-7\end{cases}\Rightarrow C(-1,5)$$

La longitud de la base es $d(A,B)=\sqrt{\frac{8704}{49}}=\frac{16\sqrt{34}}{7}$ u y la altura es $d(C,AB)=\frac{|-3-25-4|}{\sqrt{34}}=\frac{16\sqrt{34}}{17}$ u, por tanto, el área del triángulo *ABC* es $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{34}}{7}\cdot\frac{16\sqrt{34}}{17}=\frac{256}{7}$ u^2.

144. Calcula las rectas que pasan por el punto *P*(1, 2) y que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área 4,5 u^2.

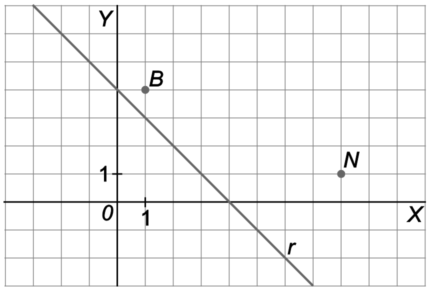
Las rectas que pasan por *P* son de la forma $y-2=m(x-1)\Rightarrow y=mx+2-m$. Cortan a los ejes en los puntos $(0,\ 2-m)$ y $\left(\frac{m-2}{m},\ 0\right)$.

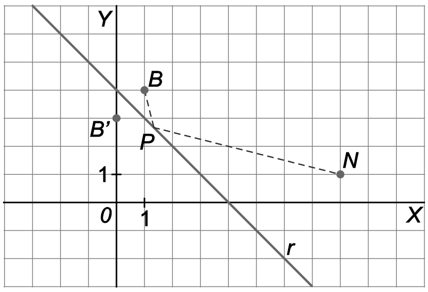
Tenemos:

$$\frac{(2-m)\frac{m-2}{m}}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow -m^2+4m-4=9m\Rightarrow m^2+5m+4=0\Rightarrow \begin{cases} m=-4\Rightarrow y=-4x+6 \\ m=-1\Rightarrow y=-x+3 \end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones.

145. Construye el camino que debe seguir la bola *B*(1, 4) para que llegue al punto *N*(8, 1) después de chocar en la banda $r: x+y-4=0$.





El simétrico de *B* respecto de *r* es *B*′(0, 3).

El punto de choque *M* es el punto de intersección de las rectas *B*′*N* y *r*:

$$B'N:\ \frac{x}{8}=\frac{y-3}{-2}\Rightarrow -x=4y-12\Rightarrow x+4y-12=0$$

$$\begin{cases} x+4y-12=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{3},\ y=\frac{8}{3}\Rightarrow P\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right).$$

Camino: $\overline{BP}-\overline{PN}$

146. Dados los puntos *A*(4, 0), *M*(6, 2) y *N*(2, 4), calcula los vértices *B* y *C* del triángulo *ABC* de forma que *M* sea el punto medio del lado $\overline{AB}$ y *N* el punto medio del lado $\overline{AC}$.

Si $B(b_1,\ b_2)$ y $C(c_1,\ c_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{4+b_1}{2}=6 \\ \frac{0+b_2}{2}=2 \end{cases}\Rightarrow b_1=8,\ b_2=4\Rightarrow B(8,\ 4) \qquad \begin{cases} \frac{4+c_1}{2}=2 \\ \frac{0+c_2}{2}=4 \end{cases}\Rightarrow c_1=0,\ c_2=8\Rightarrow C(0,\ 8)$$

147. El vértice *B* que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, *ABC*, está situado en el punto (1, 2). Sabiendo que el vértice *A* tiene por coordenadas (1, 7) y que el vértice *C* está en la recta $x-y+1=0$, calcula las coordenadas del vértice *C*.

El punto *C* es de la forma $(t-1,\ t)$. Como el triángulo es isósceles, tenemos:

$$d(A,B)=d(B,C)\Rightarrow \sqrt{0^2+5^2}=\sqrt{(t-1-1)^2+(t-2)^2}\Rightarrow 5=\pm\sqrt{2}(t-2)\Rightarrow t=\frac{4\pm5\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \begin{cases} C\left(\frac{2+5\sqrt{2}}{2},\ \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right) \\ C\left(\frac{2-5\sqrt{2}}{2},\ \frac{4-5\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

148. Determina las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes condiciones:

I. Tiene un vértice en *A*(2, –7).

II. La recta 3*x* + *y* + 11 = 0 es la altura relativa al vértice *B*.

III. La recta *x* + 2*y*+ 7 = 0 es la mediana correspondiente al vértice *C*.

La recta *AC* es perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, luego es de la forma $x - 3y + k = 0$.

Como pasa por *A*, ha de ser $k = -23$ y, por tanto, *AC*: $x - 3y - 23 = 0$.

Para conocer *C* basta calcular el punto de intersección de $x - 3y - 23 = 0$ y la altura $x + 2y + 7 = 0$, obteniéndose:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = -6 \Rightarrow C(5, -6)$$

El vértice *B*(*a*, *b*) pertenece a la altura $3x + y + 11 = 0$, por lo que se ha de cumplir $3a + b + 11 = 0$.

Por otra parte el punto medio del lado *AB*,$M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$, pertenece a la mediana $x + 2y + 7 = 0$, por lo que se cumplirá la ecuación $\frac{a+2}{2} + 2 \cdot \frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas para *a* y *b*, encontramos las coordenadas del punto *B*:

$$\begin{cases} 3a + b + 11 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = 1 \Rightarrow B(-4, 1)$$

Las ecuaciones de los otros dos lados se calculan ahora de forma inmediata obteniéndose:

AB: $4x + 3y + 13 = 0$ y *BC*: $7x + 9y + 19 = 0$.

149. Calcula las ecuaciones de una recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y forma triángulos isósceles con las rectas *r* : *x* – 2*y* = 0 y *s* : 2*x* + *y* = 0.

Las pendientes de *r* y *s* valen $\frac{1}{2}$ y –2 por lo que son perpendiculares. Por tanto, la recta buscada forma un ángulo de 45º con cada una de las rectas dadas.

Observemos que hay dos rectas que cumplen esta condición, la bisectriz de *r* y *s* y la recta buscada.

Si *m* es la pendiente de la recta buscada, tomando, por ejemplo, *s*, tenemos:

$$\text{tg}\, 45^\circ = \left|\frac{-2 - m}{1 - 2m}\right| \Rightarrow -2 - m = \pm(1 - 2m) \Rightarrow m = 3,\ m = -\frac{1}{3}$$

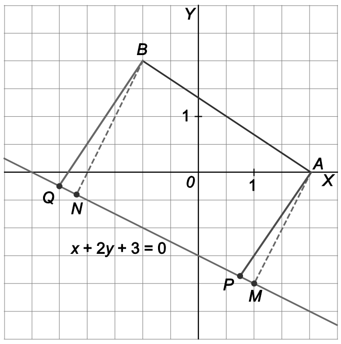
Para cualquiera de estos valores, el ángulo formado con *r* es también 45º.

Obtenemos así las dos rectas predichas, $y + 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 10$ y $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow x + 3y = 0$.

La segunda pasa por el punto de corte, *O*(0, 0), de *r* y *s*, por lo que es la bisectriz de *r* y *s*, es decir, la ecuación buscada es $y = 3x - 10$.

150. Un trapecio rectángulo tiene dos vértices en los puntos *A*(2, 0) y *B*(–1, 2). Los dos vértices restantes están sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$. Halla sus coordenadas. ¿Cuántas soluciones hay?

Como $\overline{AB} = (-3, 2)$, el lado *AB* no es paralelo a la recta $x + 2y + 3 = 0$ sobre la que están los otros dos vértices.



Caso 1: Los ángulos rectos del trapecio corresponden a los vértices *A* y *B*.

Las rectas perpendiculares a *AB* son de la forma $-3x + 2y + k = 0$.

La que pasa por *A* es $-3x + 2y + 6 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es uno de los vértices buscados:

$$\begin{cases} -3x + 2y + 6 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4},\ y = -\frac{15}{8} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$$

La que pasa por *B* es $-3x + 2y - 7 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es el otro vértice:

$$\begin{cases} -3x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{2},\ y = \Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Caso 2: Los ángulos rectos se encuentran sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$.

El vector normal de la recta y por tanto el vector director de los lados es: $\vec{n} = (1,\ 2)$

La recta que pasa por $A(2, 0)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (2, 0) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x - 4$$

La recta que pasa por $B(-1, 2)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (-1, 2) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x + 4$$

Los vértices son:

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = -2 \Rightarrow M(1, -2)$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{11}{5},\ y = -\frac{2}{5} \Rightarrow N\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

151. Del rombo *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(2, 3) y *C*(–2, –5). Sabiendo que su área es 20 u², halla los vértices *B* y *D* y el perímetro del rombo.

La ecuación de *AC* es $2x - y - 1 = 0$ y el punto medio de *AC* es *M*(0, –1).

Como *BD* es perpendicular a *AC* y pasa por *M*, tenemos *BD*: $x + 2y + 2 = 0$. De este modo, *B* es de la forma $(-2 - 2b, b)$ y *C* es de la forma $(-2 - 2d, d)$.

Para calcular *b* y *d* observemos que la diagonal *AC* mide $\sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u, por tanto, como el área es 20 u^2, la diagonal *BD* mide $2\sqrt{5}$ u.

Además, el punto medio de *BD*es *M*, por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2d + 2b)^2 + (d - b)^2} = 2\sqrt{5} \\ \left(-2 - b - d, \dfrac{b + d}{2}\right) = (0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5(d - b)^2} = 2\sqrt{5} \\ b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - b = \pm 2 \\ b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,\ d = -2 \\ b = -2,\ d = 0 \end{cases}$$

Los vértices son *B*(2, –2) y *D*(–2, 0), el perímetro es $P = 4d(A, B) = 20$ u.

152. Dadas las rectas $r: x - 2y = 2$ y $s: 2x - y + 6 = 0$, halla todas las rectas que pasen por el punto $P(1, 1)$ y que formen con r y s ángulos iguales.

Las rectas que pasan por P son de la forma: $y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow mx - y + 1 - m = 0$.

Ángulo con r: $\cos\alpha = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$ Ángulo con s: $\cos\alpha = \dfrac{|2m+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$

Por tanto: $\begin{cases} m+2 = 2m+1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow a_1 \equiv x - y = 0 \\ m+2 = -2m-1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow -x - y + 2 = 0 \Rightarrow a_2 \equiv x + y - 2 = 0 \end{cases}$

153. Los puntos $A(-2, 2)$ y $C(3, 1)$ son vértices opuestos de un rombo $ABCD$. Sabiendo que el vértice B pertenece al eje de abscisas, calcula las coordenadas de los vértices B y D y el área del rombo.

La diagonal BD está contenida en la recta perpendicular a la recta $AC: x + 5y - 8 = 0$ que pasa por $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, punto medio de la diagonal AC.

Por tanto, la diagonal BD está contenida en la recta $5x - y - 1 = 0$.

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas es el vértice $B\left(\dfrac{1}{5}, 0\right)$.

El vértice $D(a, b)$ verifica: $\overline{BD} = 2\overline{BM} \Rightarrow \left(a - \dfrac{1}{5}, b\right) = \left(\dfrac{3}{5}, 3\right) \Rightarrow a = \dfrac{4}{5}, b = 3 \Rightarrow D\left(\dfrac{4}{5}, 3\right)$.

Las diagonales del rombo miden $d(A,C) = \sqrt{26}$ u y $d(B,D) = \sqrt{\dfrac{234}{25}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{5}$ u, por tanto, el área del rombo es $S = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{3\sqrt{26}}{5} = \dfrac{39}{5}$ u^2.

154. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento $\overline{AB}$, con $A(3, 1)$ y $B(1, 2)$. Calcula las coordenadas del vértice C del triángulo, sabiendo que su área es de 4 u^2.

$d(A,B) = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ u, por tanto, la altura del triángulo verifica: $4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}h \Rightarrow h = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u.

C es el punto que situado en la perpendicular a AB por su punto medio y que dista de AB $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u:

$AB: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} \Rightarrow -x + 3 = 2y - 2 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$, y el punto medio de $\overline{AB}$ es $M\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

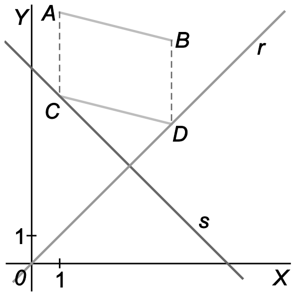
La recta perpendicular es $2x - y - \dfrac{5}{2} = 0$ y sus puntos son de la forma $\left(t, 2t - \dfrac{5}{2}\right)$. Imponiendo que disten $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u de la recta AB tenemos:

$$\frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{\left|t + 2\left(2t - \frac{5}{2}\right) - 5\right|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow |5t - 10| = 8 \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{18}{5} \Rightarrow C_1\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{47}{10}\right) \\ t = \dfrac{2}{5} \Rightarrow C_2\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{17}{10}\right) \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones.

PARA PROFUNDIZAR

155. Dadas las rectas $r: x - y = 0$ y $s: x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos $A(1, 9)$ y $B(5, 8)$, calcula las coordenadas de los extremos de un segmento $\overline{CD}$ de la misma longitud que $\overline{AB}$, paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r.



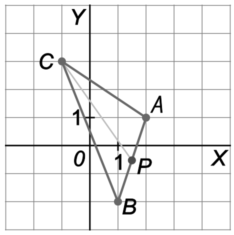
Los puntos de r son de la forma $D(d, d)$ y los puntos de s son de la forma $C(c, 7-c)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ pueden ser iguales u opuestos, por tanto:

$$\begin{cases} d-c=4 \\ d-7+c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-c=4 \\ d+c=6 \end{cases} \Rightarrow c=1,\ d=5 \Rightarrow C(1, 6) \text{ y } D(5, 5)$$

$$\begin{cases} d-c=-4 \\ d-7+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-c=-4 \\ d+c=8 \end{cases} \Rightarrow c=6,\ d=2 \Rightarrow C(6, 1) \text{ y } D(2, 2)$$

156. Dado el triángulo $A(2, 1)$, $B(1, -2)$ y $C(-1, 3)$



a) Calcula el punto P, intersección de la bisectriz del ángulo C con el lado opuesto $\overline{AB}$.

b) Demuestra que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

a) $AB: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$ $\quad AC: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

$BC: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$

Bisectriz interior del ángulo C:

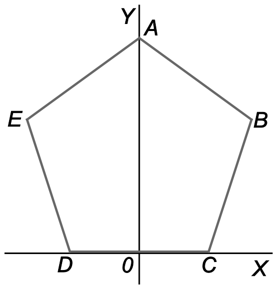
$$\frac{2x+3y-7}{\sqrt{13}} = -\frac{5x+2y-1}{\sqrt{29}} \Rightarrow \left(2\sqrt{29}+5\sqrt{13}\right)x + \left(3\sqrt{29}+2\sqrt{13}\right)y - 7\sqrt{29} - \sqrt{13} = 0$$

Al resolver el sistema formado por las rectas bisectriz y AB se obtiene el punto: $P\left(\dfrac{45-\sqrt{377}}{16}, \dfrac{55-3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecto, al realizar el cálculo se obtiene $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\sqrt{377}}{29}$.

157. Calcula, de forma exacta, las coordenadas de los vértices del pentágono regular de la figura sabiendo que su lado mide 2 unidades.

Comprueba que el cociente entre la distancia de D a B y la distancia de D a C es el número áureo $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



El ángulo interior de un pentágono regular vale $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

$C(1, 0)$, $D(-1,0)$

Por el teorema del coseno: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ}$

Teniendo en cuenta que las longitudes de DA y DB son iguales, tenemos: $A\left(0, \sqrt{DA^2 - 1^2}\right) = \left(0, \sqrt{7 + 8\cos 72^\circ}\right)$

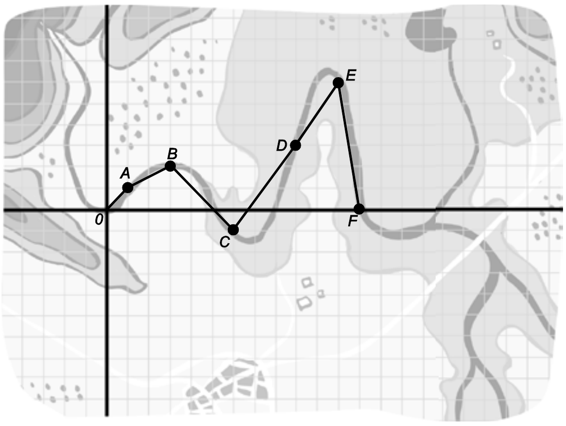
$B\left(-1 + \sqrt{8+8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8+8\cos 72^\circ} \cdot \text{sen}\, 36^\circ\right)$ $E\left(1 - \sqrt{8+8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8+8\cos 72^\circ} \cdot \text{sen}\, 36^\circ\right)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8+8\cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2\cos 72^\circ} = 1{,}618033989\ldots = \Phi$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con el río

Dentro de unos días, la clase de Antonio y Juana va a salir de excursión al campo. Aprovechando esta circunstancia y con el propósito de hacer la clase de matemáticas más animada, la profesora propone un concurso por equipos: ¿quién puede dar la mejor aproximación a la longitud que separa a las dos puntos O y F del cauce de un río?



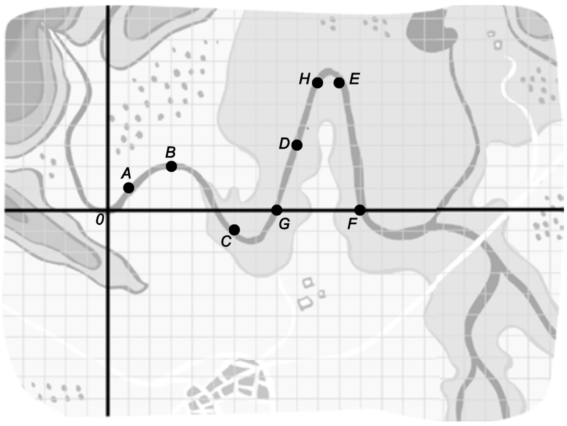
Para ello proporciona un boceto del río de la zona de acampada, calcado de un plano a escala obtenido de una página de mapas de Internet. Para facilitar la tarea, inserta un par de ejes coordenados de forma que el origen de coordenadas es el punto *O*. La cuadrícula está formada por cuadrados de 20 m de lado.

Rápidamente y con intención de demostrar que son los más rápidos a la hora de resolver problemas y, por tanto, merecedores de ganar el concurso, el equipo de Antonio, idea el siguiente método:

Elegirá cinco puntos del cauce que junto con *O* y con *F* formarán una línea poligonal *OA*–*AB*–*BC*–*CD*–*DE*–*EF*. La longitud de esta poligonal se aproximará a la longitud del cauce del río.

Tras exponer su idea a la clase, la profesora confirma que el método parece adecuado pero indica que cree que la aproximación, tal vez debido a la rapidez con la que ha sido elaborada, no es muy buena y que habría que mejorarla.

Basándose en la misma idea, el equipo de Juana, tras reflexionar un poco más, propone colocar dos puntos más *G* y *H* de forma que la nueva poligonal se ajuste mejor a la línea del cauce.



a) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Antonio.

b) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Juana.

c) Añade algún punto más y obtén la nueva aproximación.

a) *O*(0, 0),*A*(1,1),*B*(3, 2),*C*(6, –1),*D*(9, 3),*E*(11, 6) y*F*(12, 0)

La poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{25}+\sqrt{13}+\sqrt{37}\simeq 22{,}58$ u , por tanto, el equipo de Antonio obtiene 451,6 m.

b) Añadiendo los puntos *G*(8,0) y *H*(10, 6) la poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{1}+\sqrt{37}\simeq 23{,}54$ u , por lo que el equipo de Juana obtiene 470,8 m.

c) Añadiendo, por ejemplo, *I*(4,5; 1) y *J*(7,5; –1) obtenemos como aproximación $20\cdot 23{,}98=479{,}6$ m.

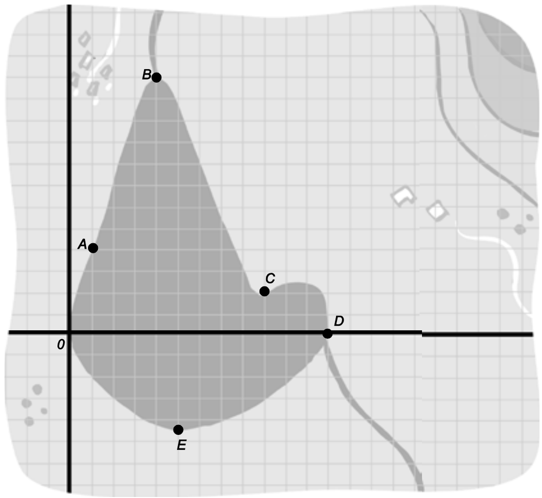
¿Piraguas en la laguna?

En la zona en la que van a acampar, el río desemboca en una laguna y los profesores del colegio están pensando si alquilar o no unas piraguas para practicar piragüismo. Como la actividad, además de cara, conlleva riesgos (y no sólo el de algún alumno en remojo), solo lo harán si la laguna es lo suficientemente grande como para que la experiencia merezca la pena y no una charca en la que dar un par de paladas.

La profesora propone un nuevo reto a los equipos: calcular aproximaciones de la superficie de dicha laguna.

De nuevo proporciona a los equipos un esquema con los límites de la superficie que se quiere calcular. Los cuadros de la cuadrícula en este caso tienen por lado 4m.

En este caso, el más rápido es el equipo de Juana, que propone considerar los puntos *O*, *A*, *B*, *C*, *D* y *E* del perímetro del lago y calcular el área del polígono formado por ellos mediante triangulación.



a) Calcula el área de los triángulos *ABC*, *OAC*, *OCD* y *ODE* de la figura utilizando los métodos de la geometría analítica.

b) Utiliza alguna aplicación de geometría dinámica para obtener el área de los triángulos anteriores y añade algunos puntos más para mejorar la aproximación.

a) $O(0, 0)$, $A(1, 4)$, $B(4, 12)$, $C(9, 2)$, $D(12, 0)$ y $E(5; -4{,}5)$

$$ABC:\begin{cases}\text{base: } d(A,C)=\sqrt{64+3}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}\text{ u}\\ AC\text{: } x+4y-17=0\\ \text{altura: } h=d(B,AC)=\dfrac{|4+4\cdot 12-17|}{\sqrt{17}}=\dfrac{35}{\sqrt{17}}=\dfrac{35\sqrt{17}}{17}\text{ u}\end{cases}\Rightarrow S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{35\sqrt{17}}{17}=35\text{ u}^2$$

$$OAC:\begin{cases}\text{base: } d(O,A)=\sqrt{17}\text{ u}\\ OA: 4x-y=0\\ \text{altura: } h=d(C,OA)=\dfrac{|36-2|}{\sqrt{17}}=\dfrac{34}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}\text{ u}\end{cases}\Rightarrow S_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 2=17\text{ u}^2$$

$$OCD:\begin{cases}\text{base: } d(O,D)=12\text{ u}\\ \text{altura: } h=2\text{ u}\end{cases}\Rightarrow S_3=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2=12\text{ u}^2\quad \overset{\Delta}{ODE}:\begin{cases}\text{base: } d(O,D)=12\text{ u}\\ \text{altura: } h=4{,}5\text{ u}\end{cases}\Rightarrow S_4=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4{,}5=27\text{ u}^2$$

El equipo de Juana obtiene $S\simeq S_1+S_2+S_3+S_4=35+17+12+27=91\text{ u}^2\Rightarrow 91\cdot 4^2=1456\text{ m}^2$

b) La superficie se aproxima a $103\text{ u}^2\Rightarrow 103\cdot 16=1648\text{ m}^2$

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula en cada caso la ecuación de la recta.

a) Paralela a la recta $s: 2x+3y=5$ y que pasa por $P(0,-3)$.

b) Perpendicular a la recta $s: 4x-3y+5=0$ y que pasa por el punto $P(1, 1)$.

c) De dirección la del vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(2, 4)$ y $B(-1,3)$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x+y-20=0$ e $y=x+2$.

a) Las rectas paralelas a s son de la forma $2x+3y+K=0$, la que pasa por P es:

$-9+K=0 \Rightarrow K=9 \Rightarrow 2x+3y+9=0$

b) Las rectas perpendiculares a s son de la forma $3x+4y+K=0$, la que pasa por P es:

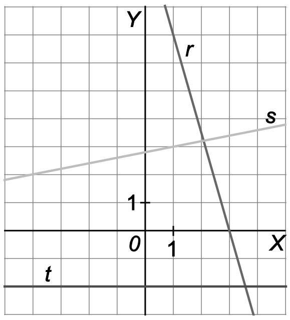
$3+4+K=0 \Rightarrow K=-7 \Rightarrow 3x+4y-7=0$

c) Calculamos el punto de intersección:

$$\begin{cases} 5x+y-20=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=5 \Rightarrow P(3, 5)$$

Como $\overrightarrow{AB}=(-3, -1)$, la recta buscada tiene ecuación: $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-5}{-1} \Rightarrow x-3y+12=0$

2. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas *r*, *s* y *t* que aparecen en la figura. Indica un vector de dirección de cada una de ellas.



La recta r pasa por los puntos (3, 0) y (1, 7), por tanto, un vector director es $\vec{u_r}=(-2, 7)$, su ecuación es $r: 7x+2y-21=0$, su pendiente es $m_r=-\dfrac{7}{2}$ y su ordenada en el origen es $n_r=\dfrac{21}{2}$.

La recta s pasa por los puntos (1, 3) y (–4, 2), por tanto, un vector director es $\vec{u_s}=(5, 1)$, su ecuación es $s: x-5y+14=0$, su pendiente es $m_s=\dfrac{1}{5}$ y su ordenada en el origen es $n_s=\dfrac{14}{5}$.

La recta t es la recta horizontal $t: y=-2$, con vector director $\vec{u_t}=(1, 0)$, pendiente $m_t=0$ y ordenada en el origen $n_t=-2$.

3. Calcula la ecuación de la recta paralela a $x+y=0$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de 30 u^2. ¿Hay una única solución?

La recta debe tener por ecuación $x+y=k$, por lo que corta a los ejes en los puntos $A(k, 0)$ y $B(0, k)$.

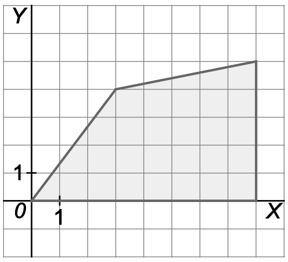
El área del triángulo OAB será $S=\dfrac{k^2}{2}=30 \Rightarrow k^2=60 \Rightarrow k=\pm\sqrt{60}=\pm 2\sqrt{15}$

Por tanto, hay dos soluciones: $\begin{cases} x+y=\sqrt{60} \\ x+y=-\sqrt{60} \end{cases}$

4. Calcula el punto simétrico de *P*(5,–2) respecto del punto intersección de las rectas $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 5} \\ \mathbf{-x + 4y = 2} \end{cases}$**.**

El punto de intersección de las rectas es *Q*(2, 1), por tanto, si *P′*(*a*, *b*) es el simétrico de *P*, tenemos que *Q* debe ser el punto medio de *PP′*, con lo que: $\begin{cases} \dfrac{5+a}{2} = 2 \\ \dfrac{-2+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 4 \Rightarrow P' = (-1,\ 4)$

5. Calcula el área del cuadrilátero de la figura.



Los vértices del cuadrilátero son *O*(0, 0), *A*(3, 4), *B*(8, 5) y *C*(8, 0).

Área del triángulo *OAC*: $S_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(A,C) \cdot d(A,OC)}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ u}^2$

Área del triángulo *ACB*: $S_2 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(B,C) \cdot d(A,BC)}{2} = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2} \text{ u}^2$

Área del cuadrilátero: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{57}{2} \text{ u}^2$

6. Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2),*B*(1,4) y *C*(2,–1), calcula:

a) Los ángulos

b) Las coordenadas de su ortocentro

c) La ecuación de la bisectriz del ángulo A

a) $AB: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0 \quad AC: \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x + 5y - 1 = 0 \quad BC: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-5} \Rightarrow 5x + y - 9 = 0$

Ángulo *A*: $\cos\hat{A} = \dfrac{|3-10|}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \dfrac{7}{\sqrt{170}} = \dfrac{7\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{A} = 57{,}53^\circ$

Ángulo *B*: $\cos\hat{B} = \dfrac{|5-2|}{\sqrt{5}\sqrt{26}} = \dfrac{3}{\sqrt{130}} = \dfrac{3\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{B} = 74{,}74^\circ$

Ángulo *C*: $\cos\hat{C} = \dfrac{|15+5|}{\sqrt{34}\sqrt{26}} = \dfrac{20}{2\sqrt{221}} = \dfrac{10\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{C} = 47{,}73^\circ$

b) Altura por *A*: $x - 5y + K = 0 \Rightarrow -3 - 10 + K = 0 \Rightarrow K = 13 \Rightarrow x - 5y + 13 = 0$

Altura por *B*: $5x - 3y + K = 0 \Rightarrow 5 - 12 + K = 0 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow 5x - 3y + 7 = 0$

Ortocentro: $\begin{cases} x - 5y + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2}{11},\ y = \dfrac{29}{11} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{11},\ \dfrac{29}{11}\right)$

c) $\dfrac{x - 2y + 7}{\sqrt{5}} = \dfrac{3x + 5y - 1}{\sqrt{34}} \Rightarrow \left(\sqrt{34} - 3\sqrt{5}\right)x - \left(2\sqrt{34} + 5\sqrt{5}\right)y + 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$

7. Dados la recta $r: x+y-1=0$ y los punto $A(4,-4)$ y $B(5,-1)$, calcula el punto intersección de la mediatriz del segmento AB con la recta perpendicular a r y que pasa por A.

Mediatriz del segmento *AB:* $\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2} \Rightarrow x+3y+3=0$

Perpendicular a *r* por *A*: $x-y+K=0 \Rightarrow 4+4+K=0 \Rightarrow K=-8 \Rightarrow x-y-8=0$

Punto de intersección: $\begin{cases} x+3y+3=0 \\ x-y-8=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{21}{4},\ y=-\frac{11}{4} \Rightarrow P\left(\frac{21}{4},-\frac{11}{4}\right)$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las rectas $r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$:

A. Son paralelas.

B. Son secantes y se cortan en el punto $Q(2, 3)$.

C. Son secantes y se cortan en el punto $R(1, 1)$.

D. Son la misma recta.

$r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x-y-1=0 \quad s: \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}}=y-1 \Rightarrow 2x-y-1=0$

La respuesta correcta es D.

2. La proyección ortogonal del segmento de extremos $A(1, 5)$ y $B(3, 5)$ sobre la recta $y-x=0$ mide:

A. 2 u

B. $2\sqrt{2}$ u

C. $\sqrt{2}$ u

D. Ninguna de las anteriores.

Las recta perpendiculares a $x-y=0$ son de la forma $x+y+K=0$, la que pasa por *A* es $x+y-6=0$ y la que pasa por B es $x+y-8=0$.Intersecando estas rectas con $x-y=0$ obtenemos los extremos *A′* y *B′* de la proyección ortogonal del segmento *AB*.Así, $A'(3, 3)$ y $B'(4, 4)$, con lo que $d(A',B')=\sqrt{2}$, la respuesta C.

3. El área del triángulo determinado por el origen de coordenadas y las intersecciones de la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ con los ejes coordenados es:

A. $A=ab$

B. $A=\frac{ab}{2}$

C. $A=2ab$

D. $A=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$

Los puntos de intersección son $(a, 0)$ y $(0, b)$, por tanto, el área del triángulo es $A=\frac{ab}{2}$, la respuesta B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los puntos del plano *A*(*a*, 1), *B*(*a* – 1, 4) y *C*(–1, *a*).

A. Para $a = -2$ los puntos están alineados.

B. Para $a = \frac{1}{2}$, *ABC* es un triángulo rectángulo en *A*.

C. Para $a = 2$, *ABC* es un triángulo isósceles.

D. Para $a = -2$, B es el punto medio del segmento *AC*.

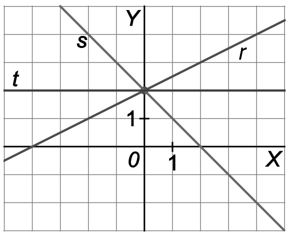
Se observa que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1-a,\ a-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-a,\ a-4)$ y el punto medio de *AC* es $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$.

Si $a = -2$ se tiene que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -3)$ son proporcionales, por lo que la respuesta A es correcta, pero el punto medio de *AC*, $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ no coincide con *B*, por lo que la respuesta D es incorrecta.

Si $a = \frac{1}{2}$ se tiene que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son perpendiculares, por lo que la respuesta B es correcta.

Si $a = 2$ se tiene que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (-3, -1)$ tienen la misma longitud, pero es distinta de la longitud de $\overrightarrow{BC} = (-2, -2)$, por lo que la respuesta C también es correcta.

5. Para *r*, *s* y *t*, sean m_r, m_s y m_t las pendientes y n_r, n_s y n_t las ordenadas en el origen.



A. $m_r = 2,\ m_s = -2$ y $m_t = 0$

B. $m_r = \frac{1}{2},\ m_s = -1$ y $m_t = 0$

C. $m_t = 1$ y $n_t = 2$

D. $m_r = \frac{1}{2}$ y $n_r = 2$

$m_r = \frac{1}{2},\ m_s = -1,\ m_t = 0$ y $n_r = n_s = n_t = 2$, por tanto, las respuestas correctas son B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se considera el haz de rectas $2x - y + \lambda(x + y - 3) = 0$ de vértice el punto (1, 2) y se consideran las afirmaciones:

1. La ecuación de la recta *r* se obtiene al sustituir algún valor real de λ en la expresión del haz.

2. La recta *r* pasa por el punto (1, 2)

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

La ecuación del haz representa todas las rectas que pasan por (1, 2) salvo la recta $x + y - 3 = 0$, por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular la ecuación de una única recta *s* paralela a la recta *r* y que diste de ella *k* u se dan los siguientes datos:**

   1. **La ecuación general de *r* es $3x - 4y + 3 = 0$.**
   2. **$k = 3$ u**
   3. **La ordenada en el origen de *r* es mayor que la de *s*.**

   A. El dato 1 es innecesario.

   B. El dato 2 es innecesario.

   C. El dato 3 es innecesario.

   D. Ningún dato es innecesario.

   Obviamente necesitamos los datos 1 y 2, pero sólo con estos datos podemos encontrar dos rectas paralelas a *r* que disten de ella *k* u, una a cada lado de *r*. Para que haya una única solución también necesitamos el dato 3, por tanto, la respuesta correcta es D.