1 Números reales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Calcula la expresión decimal o fraccionaria según corresponda.

a) $\frac{23}{25}$ **b)** $\frac{22}{12}$ **c)** $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ **d)** $45,55$ **e)** $45,1\widehat{5}$

a) 0,92

b) $1,8\widehat{3}$

c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$

d) $N=45,55=45,\widehat{5}=45,555...\Rightarrow\begin{cases}10N=455,555...\\ N=45,555...\end{cases}\Rightarrow 9N=410\Rightarrow N=\frac{410}{9}$

e) $N=45,1\widehat{5}=45,1555...\Rightarrow\begin{cases}100N=4515,555...\\ 10N=451,555...\end{cases}\Rightarrow 90N=4064\Rightarrow N=\frac{4064}{90}=\frac{2032}{45}$

4. Indica, para cada número, si es racional o irracional.

a) 1,234 44… **c)** –3, 010 010 001… **e)** $2-\sqrt{49}$

b) 1,232 323… **d)** $1+\sqrt{2}$ **f)** $-\sqrt{2+\sqrt{4}}$

a) Racional, es un número decimal periódico.

b) Racional, es un número decimal periódico.

c) Irracional, es un número decimal no periódico.

d) Irracional

e) Racional, $2-\sqrt{49}=2-7=-5$.

f) Racional, $-\sqrt{2+\sqrt{4}}=-\sqrt{2+2}=-\sqrt{4}=-2$.

5. Calcula los dos valores de *x* que cumplen la siguiente condición: $3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=5$

$$3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=\begin{cases}3x-\frac{1}{2}-4\left(-(x-3)\right) & \text{si} \quad x-3<0\\ 3x-\frac{1}{2}-4(x-3) & \text{si} \quad x-3\geq 0\end{cases}=\begin{cases}7x-\frac{25}{2} & \text{si} \quad x<3\\ -x+\frac{23}{2} & \text{si} \quad x-3\geq 0\end{cases}$$

Si $x<3$, tenemos $7x-\frac{25}{2}=5\Rightarrow x=\frac{35}{14}=\frac{5}{2}$, que es una solución válida.

Si $x\geq 3$, tenemos $-x+\frac{23}{2}=5\Rightarrow x=\frac{13}{2}$, que es una solución válida.

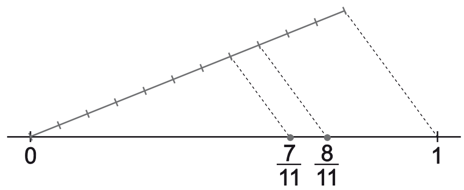
6. Un informe sobre el uso de bicicletas en la población juvenil de una localidad dice que exactamente el $45,\widehat{45}$ % de los jóvenes utilizan la bicicleta por lo menos un día a la semana. Sabiendo que la población juvenil de esa localidad es menor que 10 000 y mayor que 9990, ¿cuántos exactamente utilizan la bicicleta?

$$45,45 = \frac{4545-45}{99} = \frac{4500}{99} = \frac{500}{11} \Rightarrow \frac{45,45}{100} = \frac{5}{11}$$

Los $\frac{5}{11}$ de los jóvenes de la localidad usan la bicicleta por lo menos un día a la semana, por tanto, el número de jóvenes de la localidad debe ser múltiplo de 11. El único número entre 9 990 y 10 000 que es múltiplo de 11 es 9999, con lo que hay 9999 jóvenes en la localidad y 4545 contestaron que usan la bicicleta.

7. Ejercicio resuelto.

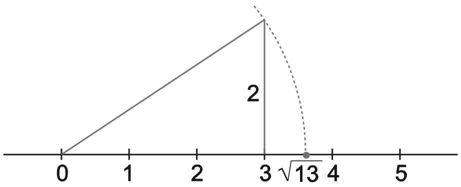
8. Representa $\frac{7}{11}$ y $\frac{8}{11}$. Halla tres números fraccionarios comprendidos entre ellos.



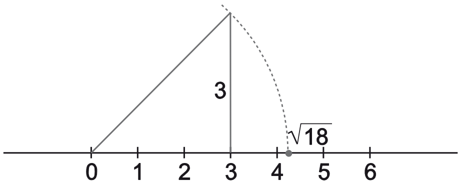
$\frac{7}{11} = \frac{28}{44}$ y $\frac{8}{11} = \frac{32}{44}$, por tanto, entre ellos están $\frac{29}{44}$, $\frac{30}{44} = \frac{15}{22}$ y $\frac{31}{44}$.

9. Escribe los números 13 y 18 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{13}$ y $\sqrt{18}$ en la recta real.

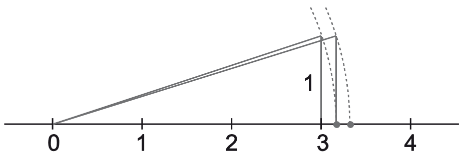
$13 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{2^2 + 3^2}$



$18 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$



10. ¿Qué números reales son los representados en la figura?



$x = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ e $y = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

11. Ejercicio resuelto.

12. Da las aproximaciones por defecto y por exceso y redondea los siguientes números con dos, tres y cuatro cifras decimales.

a) $\frac{12}{7}$ **b)** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,71	1,72	1,71
1,714	1,715	1,714
1,7142	1,7143	1,7143

b)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,55	1,56	1,55
1,553	1,554	1,554
1,5537	1,5538	1,5538

c)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,61	1,62	1,62
1,618	1,619	1,618
1,6180	1,6181	1,6180

13. Acota el error relativo cometido al aproximar $\sqrt{3}$ por 1,73.

$E_r = \frac{\left|\sqrt{3}-1{,}73\right|}{\sqrt{3}} < \frac{1{,}74-1{,}73}{1{,}73} \simeq 0{,}006$. La cota del error relativo es del orden del 0,6 %.

14. Calcula el error absoluto y la cota del error relativo al redondear e^{π} a las milésimas.

El valor redondeado es $e^{\pi} \simeq 23{,}141$, que coincide con la aproximación por exceso.

El error absoluto es $E_a = \left|e^{\pi} - 23{,}141\right| = \left|23{,}140\,069... - 23{,}141\right| = 0{,}000\,307...$

La cota del error relativo es $E_r = \frac{E_a}{e^{\pi}} < \frac{0{,}000\,307...}{23{,}140} = 0{,}000\,013...$, es decir, del orden del 0,001 %.

15 y 16. Ejercicios resueltos.

17. Calcula aproximaciones de tres cifras por exceso y por defecto de 2*a* + 3*b* – 5 sabiendo que:

$2{,}023 < a < 2{,}024$ y $-0{,}251 < b < -0{,}250$

Aproximación por defecto: $2 \cdot 2{,}023 + 3(-0{,}251) - 5 = -1{,}707$

Aproximación por exceso: $2 \cdot 2{,}024 + 3(-0{,}250) - 5 = -1{,}702$

18. Con la calculadora halla aproximaciones, por defecto y por exceso, con tres y cuatro cifras decimales, para los números $\sqrt{3\sqrt{2}}$ y $1+2\sqrt{3}$, así como para su suma, diferencia, producto y cociente.

	Calculadora	Aprox. defecto 3 decimales	Aprox. exceso 3 decimales	Aprox. defecto 4 decimales	Aprox. exceso 4 decimales
$\sqrt{3\sqrt{2}}$	2,059 767…	2,059	2,060	2,059 7	2,059 8
$1+2\sqrt{3}$	4,644 101…	4,464	4,465	4,464 1	4,464 2
$\sqrt{3\sqrt{2}}+\left(1+2\sqrt{3}\right)$	6,523 868…	6,523	6,524	6,523 8	6,523 9
$\sqrt{3\sqrt{2}}-\left(1+2\sqrt{3}\right)$	–2,404 334…	–2,405	–2,404	–2,404 4	–2,404 3
$\sqrt{3\sqrt{2}}\left(1+2\sqrt{3}\right)$	9,195 009…	9,195	9,196	9,195 0	9,195 1
$\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{1+2\sqrt{3}}$	0,461 406…	0,461	0,462	0,461 4	0,461 5

19. Se quiere vallar un campo rectangular siendo $\sqrt{2}$ el cociente de sus dimensiones.

a) ¿Cuánto vale el cociente entre la diagonal y el lado menor?

b) La diagonal mide 48 m. Calcula el precio que se deberá pagar si cada metro de valla cuesta 25 €.

a) Si a es el lado mayor y b el menor, se sabe que $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$.

La diagonal es $D=\sqrt{a^2+b^2}$, por tanto, el cociente entre la diagonal y el lado menor es

$$\frac{D}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

b) Tenemos $\dfrac{D}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow b=\dfrac{D}{\sqrt{3}}=\dfrac{48}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}b=\dfrac{48\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, por tanto, el perímetro del campo es $P=2a+2b=\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y el coste del vallado será $C=25P=25\cdot\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\simeq 3345$ €

20. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}$

a) $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}=\dfrac{2^{40}\left(-6^{-15}\right)}{-18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{6^{15}\cdot 18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{(2\cdot 3)^{15}\left(2\cdot 3^2\right)^{35}}=\dfrac{2^{40}}{2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 2^{35}\cdot 3^{70}}=\dfrac{2^{40}}{2^{50}\cdot 3^{85}}=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 3^{85}}$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{3^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3^2}{2^8}$

21. Determina si las igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=-\dfrac{13475}{1026}$ **b)** $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{1}{xy^3}$

a) $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=\dfrac{\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{49}-\dfrac{1}{125}}=\dfrac{-\dfrac{22}{135}}{\dfrac{76}{6125}}=-\dfrac{22}{135}\cdot\dfrac{6125}{76}=-\dfrac{134750}{10260}=-\dfrac{13475}{1026}$, la igualdad es verdadera.

b) $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{x^2}{x^3y^2y}=\dfrac{1}{xy^3}$, la igualdad es verdadera.

22. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0$ **b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}$ **c)** $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\frac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}$

a) $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0=4-8-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-1=-\frac{43}{8}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}=\frac{8}{125}-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{125}-\frac{1}{125}=\frac{7}{125}$

c) $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt{25}=2+3-5=0$

d) $\frac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}=\frac{a^{-\frac{3}{5}}\cdot a^{-2}}{a\cdot a^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{-\frac{13}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}}=a^{-\frac{53}{15}}=\frac{1}{\sqrt[15]{a^{53}}}$

23 y 24. Ejercicios resueltos.

25. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8}\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}$ **e)** $\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}$ **d)** $\frac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}$ **f)** $\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt{8}\sqrt{27}=\sqrt{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}=\sqrt[3]{\frac{2^9}{2^3\cdot 5^2}}=\sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}=\frac{2^2}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{5}$

c) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}=\sqrt[3]{2^2}\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}=\sqrt[15]{2^{10}}\sqrt[15]{2^9\cdot 7^6}=\sqrt[15]{2^{19}\cdot 7^6}=2\sqrt[15]{2^4\cdot 7^6}$

d) $\frac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}=\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt{2^2\cdot 3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[4]{2^4\cdot 3^6}}=\sqrt[4]{\frac{3}{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt[3]{2^5}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\frac{\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}}{\sqrt[6]{2^{10}}}\right)\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

f) $\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt{2^{-1}}\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[12]{2^{-6}}\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{2^{-5}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2^5}}=\frac{\sqrt[12]{2^7}}{\sqrt[12]{2^5}\sqrt[12]{2^7}}=\frac{\sqrt[12]{2^7}}{2}$

26. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{8}}$ **b)** $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3$ **c)** $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{8}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[6]{2^3}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[16]{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2}}{\sqrt[4]{2^2\cdot 2}}=\frac{\sqrt[16]{2^{15}}}{\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt[16]{\frac{2^{15}}{2^{12}}}=\sqrt[16]{2^3}$

b) $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3=\left[\left(\sqrt[6]{2^{12}\cdot 2^8}\right)^2\right]^3=\left(\sqrt[6]{2^{20}}\right)^6=2^{20}$

27. Extrae de la raíz todos los factores que sea posible.

a) $\sqrt{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^7}$ b) $\sqrt[3]{a^5 b^{12} c^7}$ c) $\sqrt[5]{\dfrac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}}$

a) $\sqrt{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^7} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \sqrt{3 \cdot 5}$ b) $\sqrt[3]{a^5 b^{12} c^7} = ab^4c^2\sqrt[3]{a^2c}$ c) $\sqrt[5]{\dfrac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{20}}} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^4}\sqrt[5]{2 \cdot 3^2}$

28. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32}$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}}$

c) $6\sqrt{200} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18}$

d) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4}$

a) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{2^5} = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} = -4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3^2}{2^2}} + \sqrt{\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{5^2}} = 5\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{6}{5}\sqrt{2} = \dfrac{47}{10}\sqrt{2}$

c) $6\sqrt{200} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} = 6\sqrt{2^3 \cdot 5^2} + 2\sqrt{2 \cdot 5^2} - 3\sqrt{2 \cdot 3^2} = 60\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 61\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4} = \sqrt{5a^2} - \sqrt{2^4 \cdot 5a^2} + \sqrt{2^2 \cdot 5a^4} = a\sqrt{5} - 4a\sqrt{5} + 2a^2\sqrt{5} = \left(2a^2 - 3a\right)\sqrt{5} = a(2a-3)\sqrt{5}$

29. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2\sqrt{180} + \dfrac{3}{5}\sqrt{125} + \sqrt{5}$ b) $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}}$ c) $2187^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}$

a) $2\sqrt{180} + \dfrac{3}{5}\sqrt{125} + \sqrt{5} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \dfrac{3}{5}\sqrt{5^3} + \sqrt{5} = 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 16\sqrt{5}$

b) $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{18}{5}}} = 2^{-\frac{53}{30}} = \dfrac{1}{\sqrt[30]{2^{53}}} = \dfrac{1}{2\sqrt[30]{2^{23}}} = \dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{2\sqrt[30]{2^{23}}\sqrt[30]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{4}$

c) $2187^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^7} + \sqrt{3^3} = 27\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

30. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{81}}$ c) $\dfrac{2}{1+2\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{8}}$

a) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{81}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{3\sqrt[5]{3}}{5\sqrt[5]{3^4}\sqrt[5]{3}} = \dfrac{3\sqrt[5]{3}}{15} = \dfrac{\sqrt[5]{3}}{5}$

c) $\dfrac{2}{1+2\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(1-2\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{1-12} = -\dfrac{2-4\sqrt{3}}{11} = \dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{8}} = \dfrac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)} = \dfrac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{12-8} = \dfrac{5\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$

31. Ejercicio interactivo.

32. Ejercicio resuelto.

33. Calcula $A \cup B$ y $A \cap B$ siendo:

a) $A = (-1, 4)$ y $B = [0, 5]$ **b)** $A = (2, +\infty)$ y $B = (-\infty, 3]$

a) $A \cup B = (-1, 5]$ y $A \cap B = [0, 4)$ **b)** $A \cup B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ y $A \cap B = (2, 3]$

34. Expresa, si es posible, mediante un único entorno abierto cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $(-2, 10)$ **b)** $-3 \le x \le 7$ **c)** $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ **d)** $(-a, a)$

a) Se puede expresar como el entorno abierto de centro $\frac{-2+10}{2} = 4$ y radio $10 - 4 = 6$, es decir, $E(4, 6)$.

b) Se trata del intervalo cerrado [–3, 7], por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E[2, 5]$.

c) Se trata de un intervalo cerrado, por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E\left[\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

d) Se puede expresar como el entorno abierto $E(0, a)$

35. Expresa mediante entornos los siguientes conjuntos.

a) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| < 5\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $|x + 2| < 4\}$

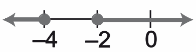
a) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| < 5\} = E(0, 5)$ **b)** $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $|x + 2| < 4\} = E(-2, 4)$

36. Representa y expresa como intervalos los siguientes conjuntos de números reales.

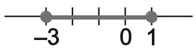
a) $|x - 2| < 2$ **b)** $|x + 3| \ge 1$ **c)** $|x + 1| \le 2$

a) (0, 4)

b) $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$



c) $[-3, 1]$



37. Ejercicio resuelto.

38. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.

a) 0,000 025 · 0,003 2 **b)** 0,002 5 : 12 500 000 **c)** $0{,}000\,000\,000\,012^{20}$ **d)** $2{,}4 \cdot 12^{21} + 33{,}2 \cdot 10^{22}$

a) $0{,}000\,025 \cdot 0{,}003\,2 = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-8}$

b) $0{,}002\,5 : 12\,500\,000 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} : 1{,}25 \cdot 10^{7} = 2 \cdot 10^{-10}$

c) $0{,}000\,000\,000\,012^{20} = \left(1{,}2 \cdot 10^{-11}\right)^{20} \simeq 38{,}337\,6 \cdot 10^{-220} = 3{,}833\,76 \cdot 10^{-119}$

d) $2{,}4 \cdot 12^{21} + 33{,}2 \cdot 10^{22} = 2{,}4 \cdot 10^{21} + 332 \cdot 10^{21} = 334{,}4 \cdot 10^{21} = 3{,}344 \cdot 10^{23}$

39. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado con la precisión adecuada.

a) 25,35 + 7723,1 + 2,035 – 222,256 **b)** 2,25 · 1,237 – 230,40 · 0,024 + 15,01 · 23,11

a) 25,35 + 7723,1 +2,035 – 222,256 = 7528,229 $\simeq$ 7528,2

b) 2,25 · 1,237 – 230,40 · 0,024 + 15,01 · 23,11 = 2,78 – 5,5 + 346,9 = 344,2

40. Indica en cada caso el número de cifras significativas.

a) 2,035 **b)** 0,000 607 **c)** 505,000 75

a) 4 cifras significativas **b)** 3 cifras significativas **c)** 8 cifras significativas

41. Se quiere medir el total del área de dos parcelas, una rectangular de dimensiones 123,2 m y 98 m, y otra circular de radio 44,6 m. Estima dicha área con la precisión que consideres adecuada.

$123{,}2 \cdot 98 + 44{,}6^2\pi \simeq 12\,000 + 6\,250 = 18\,250$ m^2.

42. Ejercicio interactivo.

43 a 54. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Números racionales e irracionales

55. Di si los siguientes números son naturales, enteros, racionales o reales.

a) $\frac{28}{7}$ **c)** $-\frac{1}{25}$ **e)** 19

b) –12 **d)** $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ **f)** $-\frac{1}{\sqrt{24}}$

a) $\frac{28}{7} = 4$ Natural y, por tanto, entero, racional y real.

b) –12 Entero y, por tanto, racional y real. No es natural.

c) $-\frac{1}{25}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

d) $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

e) 19 Natural y, por tanto, entero, racional y real.

f) $-\frac{1}{\sqrt{24}}$ Real. No es natural, ni entero ni racional.

56. Calcula las expresiones decimales de los siguientes números racionales.

$$\frac{13}{25} \quad \frac{125}{9} \quad \frac{5}{18} \quad \frac{4}{7}$$

$\frac{13}{25} = 0,52$ $\quad \frac{125}{9} = 13,\widehat{8}$ $\quad \frac{5}{18} = 0,2\widehat{7}$ $\quad \frac{4}{7} = 0,571428$

57. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales.

$$\frac{4}{5} \quad \frac{19}{24} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{7}{8}$$

Realiza el ejercicio de dos formas diferentes:

a) Calculando las expresiones decimales de los números racionales y comparándolas.

b) Calculando expresiones fraccionarias equivalentes a las dadas con igual denominador y comparándolas.

a) $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{19}{24} = 0,791\widehat{6}$; $\frac{10}{11} = 0,90$ y $\frac{7}{8} = 0,875 \Rightarrow \frac{19}{24} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{10}{11}$

b) $\frac{4}{5} = \frac{1056}{1320}$; $\frac{19}{24} = \frac{1045}{1320}$; $\frac{10}{11} = \frac{1200}{1320}$ y $\frac{7}{8} = \frac{1155}{1320} \Rightarrow \frac{19}{24} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{10}{11}$

58. Halla dos números racionales comprendido entre $\frac{21}{31}$ y $\frac{22}{31}$.

Entre los números dados están $\dfrac{\frac{21}{31} + \frac{22}{31}}{2} = \frac{43}{62}$ y $\dfrac{\frac{21}{31} + \frac{43}{62}}{2} = \frac{85}{124}$.

También podemos observar que $\frac{21}{31} = \frac{63}{93}$ y $\frac{22}{31} = \frac{66}{93}$, por lo que, entre ellos están $\frac{64}{93}$ y $\frac{65}{93}$.

59. Calcula las expresiones fraccionarias de los siguientes números racionales.

a) 21,333…

b) 10,101 010…

c) 21,125

d) 5,812 512 512 5…

a) $21,\widehat{3} = \frac{213 - 21}{9} = \frac{192}{9} = \frac{64}{3}$

b) $10,10 = \frac{1010 - 10}{99} = \frac{1000}{99}$

c) $21,125 = \frac{21125}{1000} = \frac{169}{8}$

d) $5,8125 = \frac{58125 - 58}{9990} = \frac{58067}{9990}$

60. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. Para los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,121 314 15…

b) 12,121 212…

c) 12,012 121 2…

d) 1,010 010 001…

e) 1,123 123 123…

f) 0,001 002 003…

a) Irracional

b) Racional, $12,12 = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$

c) Racional, $12,012 = \frac{11892}{990} = \frac{1982}{165}$

d) Irracional

e) Racional, $1,123 = \frac{1122}{999} = \frac{374}{333}$

f) Irracional

61. Calcula de forma exacta el resultado de:

$$0{,}12-2\left(0{,}\widehat{1}-0{,}020\right)+0{,}0\widehat{3}$$

$0{,}12=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$; $0{,}\widehat{1}=\dfrac{1}{9}$; $0{,}020=\dfrac{20}{990}=\dfrac{2}{99}$ y $0{,}0\widehat{3}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$, por tanto, tenemos:

$$0{,}12-2\left(0{,}\widehat{1}-0{,}020\right)+0{,}0\widehat{3}=\frac{4}{33}-2\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{99}\right)+\frac{1}{30}=\frac{4}{33}-\frac{2}{11}+\frac{1}{30}=-\frac{3}{110}$$

Valor absoluto

62. Calcula el valor de las siguientes expresiones en los puntos que se indican.

a) $2+|2x-3|-|x-1|$ en $x=2$

b) $2x-2-|2x-5|$ en $x=-3$

c) $\dfrac{2x-3|3x-1|+|2x-3|}{2|x|-3|x-4|}$ en $x=-1$

a) $2+|2\cdot 2-3|-|2-1|=2+1-1=2$

b) $2(-3)-2-|2(-3)-5|=-6-2-11=-19$

c) $\dfrac{2(-1)-3|3(-1)-1|+|2(-1)-3|}{2|-1|-3|-1-4|}=\dfrac{-2-3\cdot 4+5}{2-3\cdot 5}=\dfrac{-9}{-13}=\dfrac{9}{13}$

63. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.

a) $|2x-4|+x$ **b)** $x+|2x|$ **c)** $|x-1|+x$ **d)** $(x-2)^2-|x-2|$

a) $|2x-4|+x=\begin{cases}-2x+4+x & \text{si } 2x-4<0\\ 2x-4+x & \text{si } 2x-4\geq 0\end{cases}=\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

b) $x+|2x|=\begin{cases}x-2x & \text{si } 2x<0\\ x+2x & \text{si } 2x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

c) $|x-1|+x=\begin{cases}-x+1+x & \text{si } x-1<0\\ x-1+x & \text{si } x-1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

d) $(x-2)^2-|x-2|=\begin{cases}x^2-4x+4+x-2 & \text{si } x-2<0\\ x^2-4x+4-x+2 & \text{si } x-2\geq 0\end{cases}=\begin{cases}x^2-3x+2 & \text{si } x<2\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

64. Calcula los valores de *x* que satisfacen las siguientes igualdades.

a) $|2x-1|-x=2$ **b)** $|3x-1|-2x=11$ **c)** $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2}$ **d)** $|x-2|+|x-3|=9$

a) $|2x-1|-x=2 \Rightarrow \begin{cases} -2x+1-x=2 & \text{si} \quad 2x-1<0 \\ 2x-1-x=2 & \text{si} \quad 2x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} & \text{si} \quad x<\frac{1}{2} \\ x=3 & \text{si} \quad x\geq\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{3},\ x=3$

b) $|3x-1|-2x=11 \Rightarrow \begin{cases} -3x+1-2x=11 & \text{si} \quad 3x-1<0 \\ 3x-1-2x=11 & \text{si} \quad 3x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 & \text{si} \quad x<\frac{1}{3} \\ x=12 & \text{si} \quad x\geq\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ x=12$

c) $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -x+\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si} \quad x-\frac{1}{2}<0 \\ x-\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si} \quad x-\frac{1}{2}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{si} \quad x<\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{3} & \text{si} \quad x\geq\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=0$

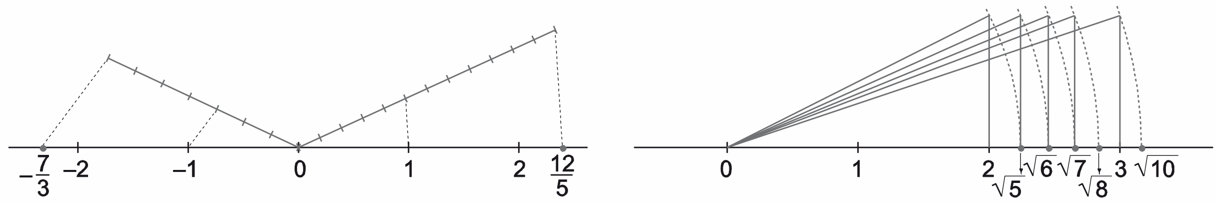
d) $|x-2|+|x-3|=9 \Rightarrow \begin{cases} -x+2-x+3=9 & \text{si} \quad x<2 \\ x-2-x+3=9 & \text{si} \quad 2\leq x<3 \\ x-2+x-3=9 & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 & \text{si} \quad x<2 \\ 0=8 & \text{si} \quad 2\leq x<3 \\ x=7 & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ x=7$

Representación de números reales

65. Representa los siguientes números reales.

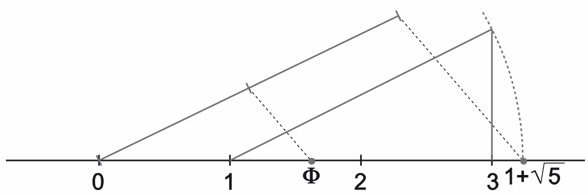
a) $\frac{12}{5}$ **c)** $-\frac{3}{7}$ **e)** $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt{7}$ **f)** $\sqrt{8}$



66. Representa el número áureo $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representamos primero $1+\sqrt{5}$ y a continuación dividimos el segmento de longitud $1+\sqrt{5}$ en dos partes iguales.



Aproximaciones y errores

67. Da la expresión aproximada que se indica en cada uno de los siguientes casos.

a) $\frac{13}{11}$ aproximando por exceso con dos cifras decimales.

b) $\sqrt{123}$ aproximando por defecto con tres cifras decimales.

c) $\pi + \pi^2$ redondeando con tres cifras decimales.

a) $\frac{13}{11} \simeq 1{,}19$ **b)** $\sqrt{123} \simeq 11{,}090$ **c)** $\pi + \pi^2 \simeq 13{,}011$

68. Escribe aproximaciones por exceso y por defecto con tres cifras decimales de los números.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$
Exceso	1,415	1,682	1,835	1,916
Defecto	1,414	1,681	1,834	1,915

69. Indica el número de cifras significativas en cada caso.

a) 22,3 **b)** 0,045 **c)** 1,002 **d)** 230,025

a) Tres **b)** Dos **c)** Cuatro **d)** Seis

70. Halla los siguientes redondeos.

a) $\frac{3}{46}$ con tres cifras significativas

b) $\sqrt{17}$ con cuatro cifras significativas

c) $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ con cuatro cifras significativas

a) $\frac{3}{46} \simeq 0{,}0652$ **b)** $\sqrt{17} \simeq 4{,}123$ **c)** $\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \simeq 4{,}878$

71. Calcula y da el resultado de acuerdo con las cifras significativas de las cantidades que intervienen.

a) 12,3 + 0,34 – 14,25

b) 0,453 · 32,42

c) 0,003 4 · 0,000 045

d) 10,5 · 23,33 – 5,003 · 10,15

e) 2,34 – 5,007 · 2,75

f) 15,03 : 2,6

a) 12,3 + 0,34 – 14,25 = –1,6

b) 0,453 · 32,42 = 14,7

c) 0,003 4 · 0,000 045 = 0,000 000 15

d) 10,5 · 23,33 – 5,003 · 10,15 = 194

e) 2,34 – 5,007 · 2,75 = –11,4

f) 15,03 : 2,6 = 5,8

72. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 3,29 como valor de $\frac{23}{7}$.

$$E_a = \left|\frac{23}{7} - 3{,}29\right| = \left|\frac{23}{7} - \frac{329}{100}\right| = \frac{3}{700} \quad \text{y} \quad E_r = \frac{E_a}{\frac{23}{7}} = \frac{3}{2300} \simeq 0{,}0013$$

73. Calcula los errores absoluto y relativo cometidos al tomar como valor de $\frac{120}{11}$ la aproximación 10,91.

$$E_a = \left|\frac{120}{11} - 10{,}91\right| = \left|\frac{120}{11} - \frac{1091}{100}\right| = \frac{1}{1100}$$

$$E_r = \frac{E_a}{\frac{120}{11}} = \frac{1}{12\,000}$$

74. Acota el error relativo que se comete al tomar como valor de $\sqrt{5}$ la aproximación 2,236.

$E_r = \dfrac{\left|\sqrt{5} - 2{,}236\right|}{\sqrt{5}} < \dfrac{2{,}237 - 2{,}236}{2{,}236} \simeq 0{,}0004$. La cota es del orden del 0,04 %.

75. Acota el error relativo que se comete al tomar $\sqrt{15}$ con tres cifras significativas.

$\sqrt{15} \simeq 3{,}87 \Rightarrow E_r = \dfrac{\left|\sqrt{15} - 3{,}87\right|}{\sqrt{15}} < \dfrac{3{,}88 - 3{,}87}{3{,}87} \simeq 0{,}0026$. La cota es del orden del 2,6 %.

Potencias y radicales

76. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

c) $\dfrac{2\cdot 3^2 + 3\cdot 2^2}{3^{-2} + 6^{-1}}$

d) $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}$

f) $(-2)^0 + (-2)^1 + ... + (-2)^8$

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2} = 4\cdot 2^{-2}\cdot 3^4 = \dfrac{4\cdot 81}{4} = 81$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = 2^2 - 2\cdot\dfrac{3^2}{2^2} = 4 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2\cdot 3^2 + 3\cdot 2^2}{3^{-2} + 6^{-1}} = \dfrac{18+12}{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}} = \dfrac{30}{\frac{5}{18}} = 108$

d) $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$

e) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}} = \dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{3^3}{2^6}\cdot 2^4\cdot 3^3 = 3^4 = 81$

f) $(-2)^0 + (-2)^1 + ... + (-2)^8 = 1 - 2 + 4 - 16 + 32 - 64 + 128 - 256 + 512 = 171$

77. Halla las siguientes multiplicaciones y divisiones con radicales.

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8}$ b) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}$ d) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{2^4}\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6}\sqrt[12]{x^4}\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^{19}} = x\sqrt[12]{x^7}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}} = \dfrac{\sqrt[12]{3^6}\sqrt[12]{3^9}}{\sqrt[12]{3^{16}}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{3}} = \dfrac{\sqrt[12]{3^{11}}}{\sqrt[12]{3}\sqrt[12]{3^{11}}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^{11}}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^9}}{\sqrt[12]{x^4}} = \sqrt[12]{x^5}$

78. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}$ d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32} = \sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^4a^3}+2a\sqrt[3]{2^3\cdot 3} = 3a\sqrt[3]{3}+4a\sqrt[3]{3} = 7a\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12} = \sqrt{3}+2\sqrt{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{3}+6\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3\cdot 5^3} = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3} = \dfrac{29}{6}\sqrt[3]{3}$

79. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ c) $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}}$ g) $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}$ d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ f) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}$ h) $\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}\right)^2$

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^4\cdot 3^2\cdot 3} = \sqrt[8]{3^7}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3\cdot 2^4}} = \sqrt[18]{2^7}$

c) $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2+3}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

e) $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}} = \sqrt[4]{5^8a^5b^{16}} = 5^2ab^4\sqrt[4]{a} = 25ab^4\sqrt[4]{a}$

f) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16}+\sqrt{729} = 4+27 = 31$

g) $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(9-12\sqrt{2}+8\right) = 34-24\sqrt{2}$

h) $\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{6}+6}{4} = \dfrac{7-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{7}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

80. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

d) $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$

e) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}$

a) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-3-4+2\sqrt{3}=-7+4\sqrt{3}$

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3=\left(1+3\cdot1\cdot\sqrt{2}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3\right)-\left(1-3\cdot1\cdot\sqrt{2}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3\right)=$

$=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\frac{3}{4}\sqrt{2\cdot3^2}-12-4\sqrt{2\cdot3^2}+6=-6+\left(\frac{9}{4}-12\right)\sqrt{2}=-6-\frac{39}{4}\sqrt{2}$

d) $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)=2\left(4-12\sqrt{2}+18\right)+(4-18)=30-24\sqrt{2}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{2^4\cdot5}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{3^4\cdot5}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=-\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

81. Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones.

a) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d) $\frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

f) $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

a) $\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}=\frac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y}=\frac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2}=2\sqrt{2\cdot3^2}+2\sqrt{2^2\cdot3}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

d) $\frac{x+1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)}=\frac{\sqrt{x+1}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}-2}{1-2}=2-\sqrt{2}$

f) $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}=\frac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18}=\frac{12\sqrt{2\cdot3^2}-18\sqrt{2^2\cdot3}}{-6}=\frac{36\sqrt{2}-36\sqrt{3}}{-6}=6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

Intervalos y entornos

82. Dados los intervalos $A = (–2, 4)$ y $B = [–1, 6)$ calcula y representa:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

a) $A \cup B = (-2, 6)$

b) $A \cap B = [-1, 4)$

83. Dados los conjuntos $A = [-1, +\infty)$, $B = (-\infty, 0)$ y $C = [-1, 1]$, calcula:

a) $A \cup B$

b) $A \cup B \cup C$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup (B \cap C)$

e) $(A \cup B) \cap \overline{C}$

f) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C$

a) $A \cup B = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

b) $A \cup B \cup C = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

c) $A \cap B \cap C = [-1, 0)$

d) $A \cup (B \cap C) = A = [-1, +\infty)$

e) $(A \cup B) \cap \overline{C} = \overline{C} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

f) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \varnothing \Rightarrow (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C = \varnothing$

84. Expresa en forma de intervalo y de entorno los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x-3| < 5$

b) $|x+3| \le 0,25$

c) $\left|x+\frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{4}$

d) $|x+2| < \frac{2}{3}$

e) $|x-3| \ge 7$

f) $\left|x+\frac{2}{5}\right| > 10$

a) $E(3, 5) = (3-5, 3+5) = (-2, 8)$

b) $E[-3; 0,25] = [-3-0,25; -3+0,25] = [-3,25; -2,75]$

c) $E\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] = \left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right] = \left[-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right]$

d) $E\left(-2, \frac{2}{3}\right) = \left(-2-\frac{2}{3}, -2+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

e) No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $(-\infty, -4) \cup (10, +\infty)$

f) No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $\left[-\infty, -\frac{48}{5}\right] \cup \left[\frac{52}{5}, +\infty\right]$

Notación científica

85. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 12 345 678

b) Sesenta billones

c) 0,000 000 000 331

d) $967 \cdot 10^{-25}$

e) $0,0097 \cdot 10^{23}$

f) –0,000 000 001 23

a) $12\,345\,678 = 1,234\,567\,8 \cdot 10^{7}$

b) Sesenta billones: $6 \cdot 10^{13}$

c) $0,000\,000\,000\,331 = 3,31 \cdot 10^{-10}$

d) $967 \cdot 10^{-25} = 9,67 \cdot 10^{-23}$

e) $0,0097 \cdot 10^{23} = 9,7 \cdot 10^{20}$

f) $-0,000\,000\,001\,23 = 1,23 \cdot 10^{-9}$

86. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.

a) $250\,000 \cdot 5{,}5 \cdot 10^5$ **b)** $\dfrac{0{,}00016\left(25\cdot 10^3+2000\right)}{0{,}0025}$ **c)** $0{,}000\,001\,5 : 0{,}000\,03$ **d)** $\dfrac{10^{23}\cdot 5{,}6\cdot 10^{-12}}{3{,}5\cdot 10^{22}+4{,}3\cdot 10^{21}}$

a) $250\,000\cdot 5{,}5\cdot 10^5 = 2{,}5\cdot 10^5\cdot 5{,}5\cdot 10^5 = 13{,}75\cdot 10^{10} = 1{,}375\cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{0{,}00016\left(25\cdot 10^3+2000\right)}{0{,}0025} = \dfrac{1{,}6\cdot 10^{-4}\left(2{,}7\cdot 10^4\right)}{2{,}5\cdot 10^{-3}} = 1{,}728\cdot 10^3$

c) $0{,}0000015 : 0{,}00003 = 1{,}5\cdot 10^{-6} : 3\cdot 10^{-5} = 0{,}5\cdot 10^{-1} = 5\cdot 10^{-2}$

d) $\dfrac{10^{23}\cdot 5{,}6\cdot 10^{-12}}{3{,}5\cdot 10^{22}+4{,}3\cdot 10^{21}} = \dfrac{5{,}6\cdot 10^{11}}{3{,}93\cdot 10^{22}} \simeq 1{,}425\cdot 10^{-11}$

87. Halla las siguientes sumas y restas dando el resultado en notación científica.

a) $0{,}32 \cdot 10^{14} + 7{,}128 \cdot 10^{12}$ **b)** $4{,}88 \cdot 10^{-14} + 7{,}921 \cdot 10^{-12}$

a) $0{,}32 \cdot 10^{14} + 7{,}128 \cdot 10^{12} = 32 \cdot 10^{12} + 7{,}128 \cdot 10^{12} = 39{,}128 \cdot 10^{12} = 3{,}9128 \cdot 10^{13}$

b) $4{,}88 \cdot 10^{-14} + 7{,}921 \cdot 10^{-12} = 4{,}88 \cdot 10^{-14} + 792{,}1 \cdot 10^{-14} = 796{,}98 \cdot 10^{-14} = 7{,}9698 \cdot 10^{-12}$

CUESTIONES

88. Da un ejemplo de número irracional que esté comprendido entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Por ejemplo $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. Este número es irracional, ya que si fuera racional, también lo sería $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y, por tanto, también sería racional $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$, de donde se deduciría que también sería racional $\sqrt{6}$, lo que sabemos no es cierto.

89. Explica un método para representar el número real $\sqrt{n+1}$ en la recta real si se conoce la representación de $\sqrt{n}$.

Solo hay que observar que $\sqrt{n+1}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{n}$ y 1.

90. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

b) La suma de dos números racionales puede ser irracional.

c) El conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

d) Existe un índice *n* tal que la raíz enésima del número –122 es un número real positivo.

e) Todos los números enteros son reales pero no todos los números reales son enteros.

f) Algunos números decimales son irracionales.

a) Falso, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son irracionales pero su suma $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ es racional.

b) Falso, ya que la suma de dos fracciones siempre es una fracción.

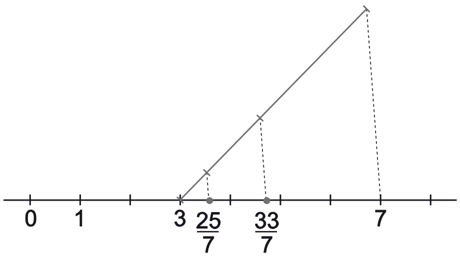
c) Falso, el conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números reales.

d) Falso, si el índice *n* es par la raíz no existe, y si es impar la raíz es negativa.

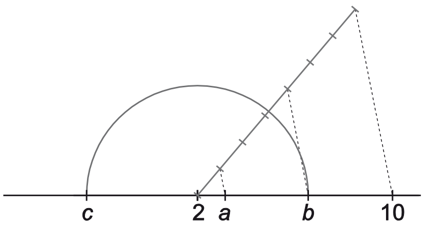
e) Verdadero, el conjunto de los números enteros está contenido en el de los números reales, pero, por ejemplo, 0,5 es un número real que no es entero.

f) Verdadero, por ejemplo π o cualquier número decimal no periódico.

91. Divide gráficamente el intervalo [3, 7] en tres partes de forma que la segunda sea el doble de la primera y la tercera el doble de la segunda. Indica los números fraccionarios que determinan de forma exacta las divisiones realizadas.



92. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* en la siguiente figura.



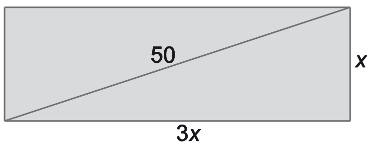
$a = 2 + \frac{8}{7} = \frac{22}{7}$ $b = 2 + 4 \cdot \frac{8}{7} = \frac{46}{7}$ $c = 2 - 4 \cdot \frac{8}{7} = -\frac{18}{7}$

PROBLEMAS

93. Se quiere vallar el perímetro de un campo rectangular del que sabemos que uno de sus lados mide el triple que el otro y que su diagonal es de 50 m.

a) Determina la superficie que ocupa dicha parcela.

b) Calcula el precio que hay que pagar si cada metro de valla cuesta 15 €. Expresa el resultado en forma de radical y después aproxima a los céntimos de euro.



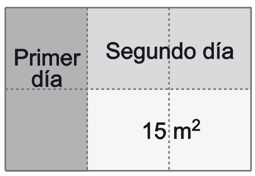
a) Sean x y $3x$ las dimensiones, en metros, del campo. Tenemos $x^2 + (3x)^2 = 50^2 \Rightarrow 10x^2 = 2500 \Rightarrow x^2 = 250 \Rightarrow x = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$ m, por tanto, la superficie de la parcela es $S = x \cdot 3x = 3x^2 = 750$ m².

b) El perímetro del campo es $P = 2(x + 3x) = 8x = 40\sqrt{10}$ m, por tanto, hay que pagar $15 \cdot 40\sqrt{10} = 600\sqrt{10}$ € $\simeq 1897{,}37$ €.

94. Una habitación con forma de ortoedro de base cuadrada y altura de la mitad del lado de la base, se pintó en tres días. Se pintaron las cuatro paredes y el techo. En el primer día se pintó la tercera parte de la superficie; en el segundo, la mitad de lo que quedaba, y en el tercero se pintaron los 15 m² que faltaban para acabar el trabajo.

a) Calcula la superficie total de la habitación y la superficie que se hizo cada día.

b) Calcula las medidas de cada una de las paredes y el volumen con la precisión que consideres adecuada.



a) Observemos que si el primer día se pintó la tercera parte de la superficie, aún quedaban por pintar dos terceras partes. El segundo día se pinta la mitad de estas dos terceras partes, es decir, otra tercera parte, y el último día la tercera parte restante. Por tanto, los tres días se pintó la misma superficie, 15 m², siendo la superficie total 45 m².

b) Si $2a$ es el lado de la base y a la altura, tenemos: $4 \cdot 2a \cdot a + 2a \cdot 2a = 8a^2 + 4a^2 = 12a^2 = 45 \Rightarrow a = 1{,}94$ m.

Por tanto, cada pared mide 3,88 m de largo y 1,94 m de alto, siendo el volumen de la habitación $V = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3 = 29{,}21$ m³.

95. Con el propósito de mejorar las ayudas sociales y el gasto en cultura de los presupuestos de un ayuntamiento, se llevó a cabo una encuesta sobre las actividades culturales que interesan a los adolescentes entre 16 y 20 años. Sabiendo que el 81,8181...% contestó que le interesaba el cine y que el 14,58333...% contestó que no le interesaban las conferencias de divulgación científica, ¿qué puedes decir acerca del número de personas que contestaron la encuesta?

$$\frac{81{,}8181...}{100} = 0{,}818181... = 0{,}\widehat{81} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$$

$$\frac{14{,}58333...}{100} = 0{,}1458333... = 0{,}1458\widehat{3} = \frac{14583 - 1458}{90000} = \frac{13125}{90000} = \frac{7}{48}$$

A $\frac{9}{11}$ de los encuestados les interesa el cine y a $\frac{7}{48}$ no les interesa las conferencias de divulgación científica, por tanto, el número de encuestados debe ser múltiplo de 11 y de 48, es decir, múltiplo de 528.

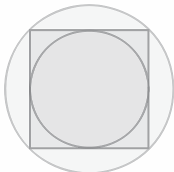
Así, no se puede conocer con certeza el número de encuestados, solo podemos deducir que es múltiplo de 528, pueden ser 528, 1056,…

96. El área de un cuadrado mide 10,25 m^2. Calcula, aproximando a los decímetros:

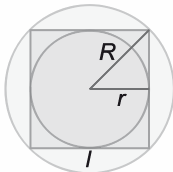
a) La diagonal del cuadrado

b) El área del círculo inscrito

c) El área del círculo circunscrito



Sean R, r y l, respectivamente, el radio del círculo circunscrito, el radio del círculo inscrito y el lado del cuadrado.



a) $l^2 = 10{,}25 \Rightarrow l = \sqrt{10{,}25} \simeq 3{,}2 \text{ m}$.

Por tanto, la diagonal del cuadrado es $D = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2 \cdot 10{,}25} \simeq 4{,}5 \text{ m}$.

b) $r = \frac{l}{2} = 1{,}6 \text{ m}$

Por tanto, el área del círculo inscrito es $S_1 = \pi \cdot r^2 \simeq 8{,}04 \text{ m}^2$

c) $R = \frac{D}{2} = 2{,}25 \text{ m}$

Por tanto, el área del círculo circunscrito es $S_2 = \pi \cdot R^2 \simeq 15{,}90 \text{ dm}^2$

97. Una entidad bancaria cambia euros por dólares cobrando, además del valor correspondiente a dichos dólares, una comisión que depende de la cantidad que se quiere cambiar según la tabla siguiente.

Cantidad de dólares que se compran	Comisión en euros
Menos o igual que 200	10
Entre 200 y 500	12
Entre 500 y 1000	14
Más o igual que 1000	15

Se sabe que por comprar 300 $ se han debido pagar 251,16 €.

a) Calcula, con cuatro cifras decimales significativas, el precio del dólar en euros y el precio del euro en dólares sin tener en cuenta la comisión.

b) Calcula los dólares que se han conseguido si se han pagado 750 €.

c) Calcula los euros que se deberían pagar para recibir al cambio 150 $.

d) Calcula los euros que se deberían pagar por 1400 $. ¿Y si se compraran en siete paquetes de 200 $?

a) Sin tener en cuenta la comisión, 300 $ equivalen a $251{,}16-12=239{,}16$ €.Por tanto, también sin comisión, un dólar equivale a $\frac{239{,}16}{300}=0{,}7972$ €, y un euro equivale a $1{,}2544$ $.

b) $(750-14)\cdot 1{,}2544=923{,}24$ $

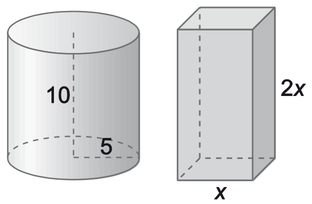
c) $150\cdot 0{,}7972+10=129{,}58$ €

d) $1400\cdot 0{,}7972+15=1131{,}08$ €

Si se compran en siete grupos de 200 $: $7\cdot(200\cdot 0{,}7972+10)=1186{,}08$

98. Una empresa elabora latas de conserva con forma cilíndrica y cuyas dimensiones son: 5 cm de radio de la base y 10 cm de altura. Tras un estudio de mercado, decide cambiar la forma de las latas: serán ortoedros de base cuadrada y de altura el doble que el lado de la base.

¿Cuáles serán las dimensiones de la nueva forma si la capacidad debe ser la misma? Establece la solución con la aproximación que consideres más adecuada.



El volumen de las latas es $V=\pi\cdot 5^2\cdot 10=785{,}4\ \text{cm}^3$, por tanto tenemos:

$$2x^3=785{,}4\Rightarrow x=7{,}32\ \text{cm}$$

Es decir, las nuevas latas deben medir 7,32 cm de lado de la base y 14,64 cm de altura.

99. En una población de 145 340 habitantes hay 42 310 menores de 18 años. ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen si se toma como porcentaje de menores de edad el 29 %?

Estamos aproximando $\frac{42\,310}{145\,340}=\frac{4\,231}{14\,534}\simeq 0{,}2911105$ por $\frac{29}{100}=0{,}29$, por tanto, los errores cometidos son:

$$E_a=\left|\frac{4\,231}{14\,534}-\frac{29}{100}\right|=\frac{807}{726\,700}\simeq 0{,}0011105$$

$$E_r=\frac{E_a}{\frac{42\,310}{14\,534}}=\frac{807}{211550}\simeq 0{,}0038156$$

100. El radio de una circunferencia se ha medido con un error menor de 0,1 cm, obteniéndose 10,2 cm.

Utiliza la aproximación de π que consideres adecuada de acuerdo con los datos del problema.

a) Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud de dicha circunferencia así como del área del círculo limitado por la misma.

b) Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud que se recorrerá al dar exactamente 5000 vueltas.

a) Si r es el radio de la circunferencia, tenemos $10{,}1 < r < 10{,}3$, por tanto, aproximando π por 3,14 obtenemos:

$$2\pi \cdot 10{,}1 < 2\pi r < 2\pi \cdot 10{,}1 \Rightarrow 63{,}43 \text{ cm} < \text{longitud} < 64{,}68 \text{ cm}$$

$$\pi \cdot 10{,}1^2 < \pi r^2 < \pi \cdot 10{,}3^2 \Rightarrow 320{,}31 \text{ cm}^2 < \text{área} < 333{,}12 \text{ cm}^2$$

b) 5000 · 63,43 < longitud de 5000 vueltas <5000· 64,68 $\Rightarrow$ 317 150 cm <recorrido< 323 400 cm

101. La escala cromática está formada por las doce notas (doce semitonos) que aparecen en la figura.

El número de vibraciones por segundo de cada nota es igual al producto del número de vibraciones de la nota anterior por el número irracional $\sqrt[12]{2}$.

Suponiendo que el número de vibraciones por segundo correspondientes a la nota La es 400, calcula, con la aproximación de números enteros:

a) Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La sostenido.

b) Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La bemol.

c) Escribe las vibraciones por segundo correspondientes a cada uno de los doce.

a) Vibraciones por segundo de La sostenido: $440 \cdot \sqrt[12]{2} = 466{,}16 \simeq 466$

b) Vibraciones por segundo de La bemol: $\dfrac{440}{\sqrt[12]{2}} = 415{,}3 \simeq 415$

c)

Do	Do sostenido	Re	Mi bemol	Mi	Fa	Fa sostenido	Sol	La bemol	La	Si bemol	Si
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

102. Una empresa cobra por el alquiler de una furgoneta 80 € diarios. Otra empresa cobra por el mismo alquiler 60 € al día, pero a esta cantidad se le deben añadir 200 € independientemente del tiempo que se contrate.

¿A partir de cuántos días es más económica la segunda empresa? Escribe la solución en forma de desigualdad y de intervalo.

Si se alquila la furgoneta n días, la primera empresa cobra $80n$ y la segunda $60n + 200$. La segunda empresa será más económica cuando $60n + 200 < 80n \Rightarrow n > 10$ días $\Rightarrow (10, +\infty)$

103. Al medir la altura de una persona de 180 cm se ha obtenido 178. Al medir la altura de un edificio de 39 m se ha obtenido 40 m. Calcula los errores absoluto y relativo de cada medida e indica razonadamente cuál de las dos es más precisa.

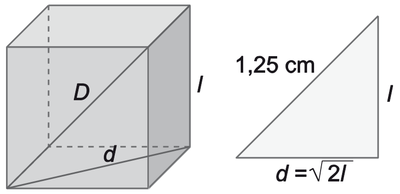
Errores en la medición de la persona: $E_a = |180 - 178| = 2$ cm y $E_r = \dfrac{2}{180} = 0{,}011$

Errores en la medición del edificio: $E_a = |39 - 40| = 1$ m y $E_r = \dfrac{1}{39} = 0{,}026$

Al ser el error relativo menor en la medición de la persona, es más precisa dicha medición.

104. La diagonal de un cubo mide exactamente 1,252 cm. Halla la superficie del cubo aproximando su diagonal por 1,25 cm. Calcula la cota del el error relativo.

$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l \Rightarrow D = \sqrt{d^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$



Superficie del cubo: $6l^2 = 6\dfrac{D^2}{3} = 2D^2$

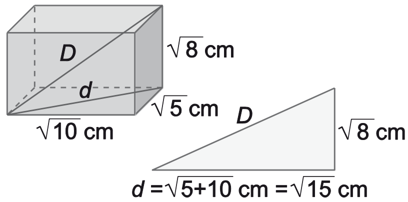
La superficie real del cubo es 2 · 1,252^2 = 3,135 008, la aproximamos por 2 · 1,25^2 = 3,125, por tanto, el error relativo es:

$E_r = \dfrac{|3{,}135\,008 - 3{,}125|}{3{,}135\,008} \simeq 0{,}0032$

105. Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado?

Aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calcula los errores absoluto y relativo cometidos. Acota el error relativo.

$d = \sqrt{5+10} = \sqrt{15}$ cm $\Rightarrow D = \sqrt{15+8} = \sqrt{23}$ cm .



La diagonal es un número irracional, que aproximamos por 4,80 cm, por tanto:

$E_a = \left|\sqrt{23} - 4{,}80\right| = |4{,}795\,58 - 4{,}80| = 0{,}004\,17$

$E_r = \dfrac{E_a}{\sqrt{23}} < \dfrac{0{,}004\,17}{4{,}79} = 0{,}000\,87$

106. Un jardín cuadrado tiene 50 m de lado. Dos personas pasean a la misma velocidad, una por el perímetro del cuadrado y la otra recorriendo una diagonal. Si parten simultáneamente de la misma esquina del parque, ¿volverán a encontrarse?

Si se encuentran lo harán en la esquina opuesta, en este caso, como van a la misma velocidad, deben haber recorrido el mismo espacio.

Ahora bien, el espacio recorrido por la persona que avanza por el perímetro es 100 m y el recorrido por la persona que va por la diagonal es $50\sqrt{2} \simeq 70{,}71$ m, con lo que no se encontraran.

Nos podemos preguntar si terminarán encontrándose si siguen paseando ininterrumpidamente, uno siguiendo el perímetro y otro recorriendo una y otra vez la diagonal.

Para resolver este problema observemos que si se encuentran lo harán en una de las esquinas de la diagonal que recorre la segunda persona y, como caminan a la misma velocidad, habrán recorrido la misma distancia.

Ahora bien, la persona que va por el perímetro habrá recorrido 100a metros para algún entero positivo$a$, mientras que la persona que avanza por la diagonal habrá recorrido $50\sqrt{2}b$ metros para algún entro positivo b.

Por tanto, obtendríamos $100a = 50\sqrt{2}b \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{2a}{b}$, es decir, $\sqrt{2}$ sería racional, lo que sabemos no es cierto.

Deducimos entonces que los caminantes no se encontrarán nunca, aunque paseen indefinidamente.

107. Un determinado tipo de protozoo tiene un diámetro de 2 · 10^{-5} m. Calcula cuántos protozoos habría que situar, uno a continuación de otro, para alcanzar una longitud de 1 cm.

0,01 : (2 · 10^{-5}) = 500 protozoos

108. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, calcula el tiempo que tardaría en llegar a la Tierra la luz emitida por una hipotética estrella que se encontrara a 12 000 000 000 km de distancia.

Expresa el resultado con la precisión que consideres adecuada.

$$t = \frac{1{,}2 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{5}} = 0{,}4 \cdot 10^{5} = 4 \cdot 10^{4} = 400\,000 \text{ segundos} = 111 \text{ días}$$

109. El diámetro de una molécula de agua mide aproximadamente 3 · 10^{-10} m.

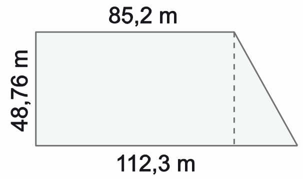
a) Calcula el volumen de una molécula de agua suponiendo que su forma es aproximadamente esférica. Expresa el resultado en notación científica.

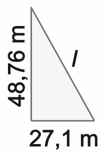
b) Calcula el número de moléculas de agua que hay en una gota de 3 mm de diámetro, expresando el resultado en notación científica.

a) $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\cdot 10^{-10}\right)^{3} = \frac{9}{2}\pi\cdot 10^{-30} = 14{,}14\cdot 10^{-30} = 1{,}414\cdot 10^{-29}\text{ m}^{3} = 1{,}414\cdot 10^{-20}\text{ mm}^{3}$

b) El volumen de la gota es $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{9}{2}\pi = 14{,}14\text{ mm}^{3}$, por tanto, contiene $\frac{14{,}14}{1{,}414\cdot 10^{-20}} = 10^{21}$ moléculas de agua.

110. Las bases de un trapecio rectángulo miden 85,2 y 112,3 m, respectivamente. La longitud del lado perpendicular a las bases se conoce previamente y con una precisión mayor: es de 48,76 m. Calcula, con la precisión adecuada, el área y el perímetro.





$l = \sqrt{48{,}76^{2} + 27{,}1^{2}} = 55{,}8 \text{ m}$

Perímetro: $85{,}2 + 48{,}76 + 112{,}3 + 54{,}8 = 301{,}1 \text{ m}$

Área: $\frac{(112{,}3 + 85{,}2)\cdot 48{,}76}{2} = 4815{,}1 \text{ m}^{2}$

111. Desarrolla el valor de la expresión $|x+1| + |x-3|$ eliminando los valores absolutos. Para ello, realiza los siguientes pasos:

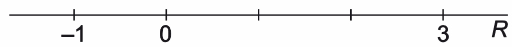
1.º Calcula los valores reales x que anulan lo valores absolutos que intervienen en la expresión; es decir, $|x+1|$ y $|x-3|$.

2.º Representa en la recta real las soluciones obtenidas en el apartado anterior. La recta queda dividida en tres intervalos o zonas.

3.º Para cada uno de los intervalos anteriores y con la ayuda de valores representantes, estudia el signo del interior de los dos valores absolutos y obtén la expresión solicitada en cada caso.

1.º Los valores absolutos se anulan si $x = -1$ o $x = 3$

2.º



3.º

	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$x + 1$	Negativo	Positivo	Positivo
$x - 3$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto,

$$|x+1| + |x-3| = \begin{cases} -(x+1)-(x-3) & \text{si} \quad x \le -1 \\ x+1-(x-3) & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ x+1+x-3 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

112. Siguiendo el procedimiento explicado en el ejercicio anterior, desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.

a) $|x-1|+|x+1|$ **b)** $x+|x|+|x-2|$

a) Los valores absolutos se anulan si $x=-1$ o $x=1$, obteniéndose

	$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$x+1$	Negativo	Positivo	Positivo
$x-1$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto,

$$|x-1|+|x+1|=\begin{cases}-(x-1)-(x+1) & \text{si} \quad x\le -1\\ -(x-1)+x+1 & \text{si} \quad -1<x<1\\ x-1+x+1 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x\le -1\\ 2 & \text{si} \quad -1<x<1\\ 2x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

b) Los valores absolutos se anulan si $x=0$ o $x=2$, obteniéndose

	$x<0$	$0<x<2$	$x>2$
x	Negativo	Positivo	Positivo
$x-2$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto,

$$x+|x|+|x-2|=\begin{cases}x-x-(x-2) & \text{si} \quad x\le 0\\ x+x-(x-2) & \text{si} \quad 0<x<2\\ x+x+x-2 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}-x+2 & \text{si} \quad x\le 0\\ x+2 & \text{si} \quad 0<x<2\\ 3x-2 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

113. ¿Es $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ un número entero? Calcula su cuadrado y observa el resultado.

$$\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)=6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}+2\sqrt{36-32}=$$

$=12+4=16\Rightarrow \sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{16}=4$, es decir, $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ sí es un número entero.

114. Simplifica la expresión $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$ escribiéndola como la suma de un número entero y la raíz cuadrada de un número natural. Para ello, intenta expresar el radicando como el cuadrado perfecto de un binomio.

$$\sqrt{59+30\sqrt{2}}=\sqrt{9+50+2\cdot 3\cdot 5\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+5\sqrt{2}\right)^2}=3+5\sqrt{2}$$

115. a) Demuestra que $0,\widehat{9}=1$.

b) Calcula el valor de $0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}$

a) $A=0,\widehat{9}=0,999...\Rightarrow\begin{cases}10A=9,999\\ A=0,999...\end{cases}\Rightarrow 9A=9\Rightarrow A=1$

b) $0,\widehat{9}=1;\ 0,0\widehat{9}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}=0,1$ y $0,00\widehat{9}=\dfrac{9}{900}=\dfrac{1}{100}=0,01\Rightarrow 0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}=1+0,1+0,01=1,11$

ENTORNO MATEMÁTICO

Compras a plazos

Ignacio trabaja en una multinacional y le han trasladado a una sede situada en un parque industrial a 50 km de su domicilio habitual, en una localidad de su misma comunidad. Además, para hacer su vida aún más cómoda, al menos dos tardes por semana tiene que ir a reuniones a la oficina anterior.

En la red de trasportes de su comunidad, Ignacio ha investigado como poder ir en trasporte público a su trabajo, y ahorrarse los temidos atascos, pero le ha surgido un problema. Si quiere llegar a tiempo a las reuniones, ¡Ignacio se tiene que comprar un coche!, pero no puede permitirse comprarlo al contado.

Afortunadamente para Ignacio, en la mayoría de los concesionarios que ha consultado, le han ofrecido un plan de plazos para adquirir el coche.

El precio total se realizará en varios pagos.

- **El primer pago será igual a las dos quintas partes del precio total.**
- **Un pago mensual, durante 40 meses, que cubra cinco sextas partes de lo que queda.**
- **Un último pago de 1200 € al cabo de los 40 meses.**

A la administración del concesionario se le ha olvidado, inexplicablemente, indicar el precio total del vehículo.

a) ¿Tiene Ignacio suficientes datos para calcular el precio total del vehículo? Si es así, ¿cómo debe hallarlo?

b) Calcula el dinero que ha de pagar Ignacio como entrada, en el primer pago.

c) ¿Cuánto ha de pagar en total durante los 40 meses? ¿Y cada mes?

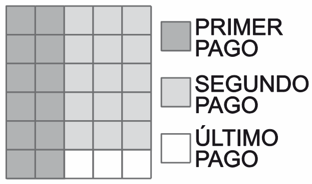
d) Ignacio tiene ahorrados 5000 €. ¿Tendrá suficiente para pagar el primer plazo?

a) Se puede calcular el precio total del vehículo del siguiente modo:

El primer pago supone $\frac{2}{5}$ del precio total, por lo que aún quedarían por pagar $\frac{3}{5}$ del precio total.

Durante 40 meses se pagan $\frac{5}{6}$ de lo que queda, es decir, el segundo pago supone $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ del precio total, por lo que ya se habrían pagado $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$, quedando por pagar $\frac{1}{10}$ del precio del vehículo, lo que equivale a 1200€.

En la figura tenemos un razonamiento alternativo que prueba que el segundo plazo equivale a $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ del precio total y el tercer pago, 1200 €, equivale a $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ del precio total.



Por tanto el precio del vehículo es $10\cdot 1200=12\,000$ €.

b) Ignacio debe pagar como entrada $\frac{2}{5}\cdot 12\,000=4\,800$ €.

c) En los siguientes 40 meses pagará $\frac{1}{2}\cdot 12\,000=6\,000$ €, es decir, $6\,000:40=150$ € cada mes.

d) Sí tendrá suficiente para afrontar el primer pago.

Formatos de papel DIN

Casi todos los estándares de fabricación se rigen por normas y convenios internacionales. Uno de ellos es el formato DIN, para la elaboración de papel y que es seguido por una gran parte de los fabricantes mundiales. Como curiosidad, este formato sigue la norma ISO 216 que se basa en la DIN 476 que data nada más y nada menos que de … ¡1922! Y que sigue las siguientes reglas:

- **El formato A0 es un rectángulo con 1 m^2 de área.**
- **El formato A0 es tal que si se dobla por la mitad se obtiene el siguiente formato, el A1. De la misma forma, al doblar el formato A1 por la mitad, se obtiene el siguiente formato, el A2. Esta regla se sigue de forma sucesiva para obtener todos los formatos: A3, A4, A5, etc.**
- **Todos los formatos son rectángulos cuyas dimensiones guardan la misma proporción. Es decir, en cualquier formato el cociente de sus dimensiones es siempre el mismo.**

a) Comprueba que la razón entre la dimensión mayor y la menor en cualquier formato es $\sqrt{2}$.

b) Comprueba que las dimensiones del formato A0 son $a=\sqrt[4]{2}$ y $b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m.

c) Elabora una tabla con una hoja de cálculo en la que aparezcan las dimensiones, redondeadas a los milímetros, de los diferentes formatos A0, A1, A2, A3, A4, etc.

a) Sean a_n y b_n la dimensión mayor y menor, respectivamente, del rectángulo de formato A*n*. Tenemos:

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{b_n}{\frac{a_n}{2}}\Rightarrow\frac{a_n^{\,2}}{2}=b_n^{\,2}\Rightarrow\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2=2\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{2}$$

b) $$\begin{cases}a_0\cdot b_0=1\\ \dfrac{a_0}{b_0}=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2}b_0\cdot b_0=1\Rightarrow b_0^{\,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow b_0=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\text{ y } a_0=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2}\text{ m.}$$

c)

	Dimensión mayor (m)	Dimensión menor (m)	Área (m^2)
A0	"=2^(1/4)"	"=B2/(2^(1/2))"	"=B2*C2"
A1	"=C2"	Copiar C2	Copiar D2
A2			
A3			
A4			
	…		

	Dimensión mayor (m)	Dimensión menor (m)	Área (m^2)
A0	1,189	0,841	1
A1	0,841	0,595	0,5
A2	0,595	0,420	0,25
A3	0,420	0,297	0,125
A4	0,297	0,210	0,0625
	…		

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenecen:

a) $-\dfrac{15}{7}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) 1,151515…

d) $\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

e) 10,15161718…

f) $\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{81}$

a) Racionales

b) Reales

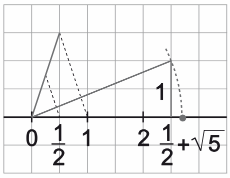
c) Racionales

d) Reales

e) Reales

f) Enteros

2. Representa en la recta real el número irracional $\dfrac{1}{2}+\sqrt{5}$.

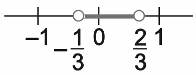


3. Aproxima hasta las centésimas por exceso y por defecto los números $\sqrt{2}$ y 2π. ¿Cuáles son las aproximaciones por defecto y por exceso del producto $2\pi\sqrt{2}$?

	$\sqrt{2}$		2π		$2\pi\sqrt{2}$	
Exceso	1,5	1,42	6,3	6,29	9,45	8,9318
Defecto	1,4	1,41	6,2	6,28	8,68	8,8548

4. Dibuja en la recta real la zona de valores reales *x* tales que $\left|2x-\dfrac{1}{3}\right|<1$ y determínala mediante un intervalo.

$$\left|2x-\frac{1}{3}\right|<1 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2},\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$



5. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 1,86 como valor de $\dfrac{13}{7}$.

Error absoluto: $E_a=\left|\dfrac{13}{7}-1{,}86\right|=\left|\dfrac{13}{7}-\dfrac{186}{100}\right|=\dfrac{1}{350}$

Error relativo: $E_r=\dfrac{\frac{1}{350}}{\frac{13}{7}}=\dfrac{1}{650}$

6. Calcula el valor de:

a) $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}$ **b)** $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}$

a) $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}=2x\sqrt{xy}-\frac{1}{5}\sqrt{5^2xy}=2x\sqrt{xy}-\sqrt{xy}=(2x-1)\sqrt{xy}$

b) $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}=ab\sqrt[3]{a}+2ab\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{2^6\cdot 3}=3ab\sqrt[3]{a}-4b\sqrt[3]{3}$

7. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones:

a) $\frac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$ **c)** $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}}}$

a) $\frac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}=\frac{18^3}{2^3\cdot 6^2}=\frac{(2\cdot 3^2)^3}{2^3\cdot(2\cdot 3)^2}=\frac{2^3\cdot 3^6}{2^3\cdot 2^2\cdot 3^2}=\frac{3^4}{2^2}=\frac{81}{4}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}}=\sqrt[12]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{72}$

c) $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2})=6(-2\sqrt{2})=-12\sqrt{2}$

También podríamos haber calculado: $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(9-6\sqrt{2}+2)-(9+6\sqrt{2}+2)=-12\sqrt{2}$

8. La máxima distancia de la Tierra a la Luna es de $4{,}07\cdot 10^8$ m y el radio de la Luna mide 1737 km. Calcula la distancia de la Tierra a la Luna tomando como unidad el diámetro de la Luna.

Diámetro de la Luna: 3474 km

Distancia máxima de la Tierra a la Luna: $4{,}07\cdot 10^8\text{ m}=4{,}07\cdot 10^5\text{ km}=\frac{4{,}07\cdot 10^5}{3474}\simeq 117{,}156$ diámetros lunares

9. Racionaliza los denominadores y simplifica todo lo que puedas las expresiones resultantes:

a) $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}$ **c)** $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}=\frac{(2\sqrt{3}-1)\sqrt{54}}{54}=\frac{2\sqrt{3\cdot 54}-\sqrt{54}}{54}=\frac{2\sqrt{2\cdot 3^4}-\sqrt{2\cdot 3^3}}{54}=\frac{2\cdot 3^2\sqrt{2}-3\sqrt{2\cdot 3}}{54}=\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}=\frac{\sqrt[4]{54^3}}{54}=\frac{\sqrt[4]{2^3\cdot 3^9}}{54}=\frac{3^2\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}{54}=\frac{\sqrt[4]{24}}{9}$

c) $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{54}(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=\frac{2\sqrt{54\cdot 3}+\sqrt{54}}{12-1}=\frac{2\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 3^3}}{11}=\frac{2\cdot 3^2\sqrt{2}+3\sqrt{2\cdot 3}}{11}=\frac{18\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{11}$

10. Dados $A=2{,}3\cdot 10^{-12}$ y $B=1{,}15\cdot 10^{-11}$. Calcula:

a) $A+B$ **b)** $A-B$ **c)** AB **d)** $\frac{A}{B}$

a) $A+B=2{,}3\cdot 10^{-12}+1{,}15\cdot 10^{-11}=0{,}23\cdot 10^{-11}+1{,}15\cdot 10^{-11}=1{,}38\cdot 10^{-11}$

b) $A-B=2{,}3\cdot 10^{-12}-1{,}15\cdot 10^{-11}=0{,}23\cdot 10^{-11}-1{,}15\cdot 10^{-11}=-0{,}92\cdot 10^{-11}=-9{,}2\cdot 10^{-12}$

c) $AB=2{,}3\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}15\cdot 10^{-11}=2{,}645\cdot 10^{-23}$

d) $\frac{A}{B}=\frac{2{,}3\cdot 10^{-12}}{1{,}15\cdot 10^{-11}}=2\cdot 10^{-1}$

11. Averigua las vueltas que debe dar la rueda de una bicicleta para recorrer 1 500 m sabiendo que el radio de la rueda es de 0,25 m. Expresa el resultado con la mejor aproximación al número de vueltas exactas.

$$\frac{1500}{2\cdot\pi\cdot 0,25}\simeq 955 \text{ vueltas}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. El inverso del número irracional $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ es:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{2}+1$

D. Los números irracionales no tienen inverso.

Obviamente, el inverso de $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ es $1+\sqrt{2}$, es decir, la respuesta C.

2. La diferencia entre los números racionales $A = 1,12\overline{1}$ y $B = 1,\overline{12}$ es:

A. 0 **B.** 0,1 **C.** 0,9 **D.** 0,09

$A - B = 1,12\overline{1} - 1,\overline{12} = \frac{1121-11}{990} - \frac{112-1}{99} = \frac{1110}{990} - \frac{111}{99} = \frac{37}{33} - \frac{37}{33} = 0$, la respuesta A.

3. Dados los valores 12,25 y 0,025 considerando que la última cifra escrita puede no ser cierta. El valor que se ha de tomar como suma de los dos números es:

A. 12,275 **B.** 12,27 **C.** 12,28 **D.** 12,3

Los valores dados son aproximaciones de las medidas reales, por tanto, la primera de las medidas está entre 12,24 y 12,26 y la segunda entre 0,024 y 0,026.

Así, la suma está entre 12,264 y 12,286, por lo que hay que tomar como suma el valor 12,3, la respuesta D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Indica cuales de los siguientes números son racionales.

A. 0,12122122212222…

B. 0,123412341234…

C. 0,112233445566…

D. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}$

A y C son irracionales, ya que no son periódicos. En cambio B es racional, ya que es periódico. Finalmente, $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2-2}{\sqrt{2}}=0$ es racional. Por tanto, las respuestas correctas son B y D.

5. Las siguientes igualdades son ciertas para cualesquiera valores reales estrictamente positivos:

A. $a^{\left(b^c\right)} = \left(a^b\right)^c$ **B.** $a^{bc} = \left(a^b\right)^c$ **C.** $\left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b$ **D.** $a^{\left(b^c\right)} = a^b$

$\left(a^b\right)^c = a^{bc} = \left(a^c\right)^b$, por lo que B y C son ciertas.En cambio A y D son falsas, por ejemplo, $2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$ no coincide con $\left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64$ ni con $2^2 = 4$. Por tanto, las respuestas correctas son B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Dados *P* y *Q* números reales. Se consideran las afirmaciones:

1. Al menos uno de los dos números reales *P* y *Q* es irracional.

2. $P + Q$ es irracional.

A. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

B. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

D. Nada de lo anterior.

1 no implica 2, por ejemplo, si *P* es irracional y $Q = -P$, tendríamos $P + Q = 0$ racional.

En cambio 2 sí implica 1, si $P+Q$ es irracional al menos uno de los dos números reales *P* y *Q* es irracional, ya que si ambos fueran racionales también lo sería $P+Q$.

Por tanto, la relación correcta es la dada en B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Con los siguientes datos:

1. $B = [0, 6)$ **2.** $A \cup B = (-2, 6)$ **3.** $A \cap B = [0, 5)$

¿Cuál es exactamente el subconjunto de números reales *A*?

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 3.

C. Se puede eliminar cualquiera de los tres datos.

D. No puede eliminarse ningún dato.

No puede eliminarse ningún dato, respuesta D, son necesarios los tres para deducir que $A = (-2, 5)$.

1 a 5. Ejercicios resueltos.

6. Halla el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ **c)** $\log_{0,001} 10^6$ **e)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8}$ **g)** $\log_{\sqrt{e}} e$ **i)** $\log_7 49^{-1}$

b) $\log \sqrt{10}$ **d)** $\ln \sqrt[3]{e}$ **f)** $\log_5 25^3$ **h)** $\log_5 0,2$

a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log \sqrt{10} = x \Rightarrow 10^x = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{0,001} 10^6 = x \Rightarrow 0,001^x = 10^6 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^6 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$

d) $\ln \sqrt[3]{e} = x \Rightarrow e^x = \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt[4]{8} \Rightarrow 4^{-x} = 8^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$

f) $\log_5 25^3 = x \Rightarrow 5^x = 25^3 = 5^6 \Rightarrow x = 6$

g) $\log_{\sqrt{e}} e = x \Rightarrow \left(\sqrt{e}\right)^x = e \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = e \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$

h) $\log_5 0,2 = x \Rightarrow 5^x = 0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

i) $\log_7 49^{-1} = x \Rightarrow 7^x = 49^{-1} = (7^2)^{-1} = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

7. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_7 x = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{7} = -3$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}} x = 3$ **d)** $\log_x 7 = 3$

a) $\log_7 x = 3 \Rightarrow 7^3 = x \Rightarrow x = 343$

c) $\log_{\frac{1}{7}} x = 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^3 = x \Rightarrow x = \frac{1}{343}$

b) $\log_x \frac{1}{7} = -3 \Rightarrow x^{-3} = \frac{1}{7} \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

d) $\log_x 7 = 3 \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

8. Toma logaritmos en la expresión: $T = \frac{2x^2y^3}{z^2}$.

$$T = \frac{2x^2y^3}{z^2} \Rightarrow \log T = \log\left(\frac{2x^2y^3}{z^2}\right) = \log\left(2x^2y^3\right) - \log\left(z^2\right) = \log 2 + 2\log x + 3\log y - 2\log z$$

9. Considerando log 2 = 0,301 y log 3 = 0,477, calcula:

a) log 12 **b)** log 15 **c)** $\log\frac{1}{144}$

a) $\log 12 = \log\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,301 + 0,477 = 1,079$

b) $\log 15 = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0,477 + 1 - 0,301 = 1,176$

c) $\log\frac{1}{144} = \log\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} = \log 1 - 4\log 2 - 2\log 3 = 0 - 4 \cdot 0,301 - 2 \cdot 0,477 = -2,158$

10. Halla con la calculadora los siguientes logaritmos y exprésalos redondeando a las milésimas.

a) $\log_3 21$ **b)** $\log_{0,01} 12$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} = 2,771$ **b)** $\log_{0,01} 12 = \frac{\log 12}{\log 0,01} = -0,540$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19 = \frac{\log 19}{\log\sqrt{3}} = 5,360$

EJERCICIOS

Logaritmos

53. Aplicando directamente la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 \frac{1}{27}$ **c)** $\log 10\,000$ **e)** $\log 0{,}001$ **g)** $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right)$ **i)** $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$ **d)** $\log \frac{1}{1000}$ **f)** $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27}$ **h)** $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right)$ **j)** $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right)$

a) $\log_3 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{-3x} = 3^{-2} \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c) $\log 10\,000 = x \Rightarrow 10^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow x = 4$

d) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

e) $\log 0{,}001 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

f) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

g) $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \sqrt{8}^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

h) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right) = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-4} \Rightarrow \frac{x}{2} = -4 \Rightarrow x = -8$

i) $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2 = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

j) $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right) = x \Rightarrow e^x = e\sqrt[3]{e} = e^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

54. Calcula el valor de *x* en cada una de las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log_x 8 = -3$ **b)** $\log_3 x = -1$ **c)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3$ **d)** $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

55. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades.

a) $P = 10x^3yz^3$ **b)** $Q = \dfrac{100x^2}{x+y}$ **c)** $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2y^5}{3z^3}}$ **d)** $S^2 = \dfrac{1+x^3}{xy^2z^{-3}}$

a) $\log P = \log 10 + 3\log x + \log y + 3\log z = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $\log Q = \log 100 + 2\log x - \log(x+y) = 2 + 2\log x - \log(x+y)$

c) $\log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $2\log S = \log\left(1+x^3\right) - \log x - 2\log y + 3\log z$

56. Escribe el valor de *E* en cada uno de los siguientes casos. En las expresiones obtenidas no deben aparecer logaritmos.

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2}$

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z = \log\dfrac{2^3y^3}{x^4z^2} \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y) = \log\left[(x-2y)^3(x+2y)\right] \Rightarrow E = (x-2y)^3(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2} = \log\dfrac{(x+10)^3\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{2x+20}{3}} = \log\dfrac{9(x+10)^3}{4(x+10)} = \log\dfrac{9(x+10)^2}{4} \Rightarrow E = \dfrac{9(x+10)^2}{4}$

57. Sabiendo que el logaritmo decimal de 2 es 0,301 y que el logaritmo decimal de 3 es 0,477, calcula, sin utilizar las teclas de funciones logarítmicas de la calculadora, los siguientes logaritmos.

a) log 250 **c)** $\log\sqrt{18}$ **e)** log 45

b) log 5,4 **d)** log 270 **f)** $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}}$

a) $\log 250 = \log\dfrac{1000}{4} = \log 1000 - \log 4 = 3 - \log 2^2 = 3 - 2\log 2 = 3 - 2\cdot 0{,}301 = 2{,}398$

b) $\log 5{,}4 = \log\dfrac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = \log 2\cdot 3^3 - 1 = \log 2 + 3\log 3 - 1 = 0{,}301 + 3\cdot 0{,}477 - 1 = 0{,}732$

c) $\log\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\log 2\cdot 3^2 = \dfrac{\log 2 + 2\log 3}{3} = \dfrac{0{,}301 + 2\cdot 0{,}477}{2} = 0{,}6275$

d) $\log 270 = \log(27\cdot 10) = \log 27 + \log 10 = \log 3^3 + 1 = 3\log 3 + 1 = 3\cdot 0{,}477 + 1 = 2{,}431$

e) $\log 45 = \log\dfrac{90}{2} = \log 90 - \log 2 = \log\left(3^2\cdot 10\right) - \log 2 = 2\log 3 + \log 10 - \log 2 = 2\cdot 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}653$

f) $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \log\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\log 1 - \log 6}{6} = \dfrac{0 - \log(2\cdot 3)}{6} = -\dfrac{\log 2 + \log 3}{6} = -\dfrac{0{,}301 + 0{,}477}{6} = -0{,}129$

58. Sabiendo que $\log_3 2 = 0,631$ y que $\log_3 5 = 1,465$, halla, sin utilizar la calculadora, el valor de $\log_3 150$.

$$\log_3 150 = \log_3\left(2\cdot 3\cdot 5^2\right) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0,631 + 1 + 2\cdot 1,465 = 4,561$$

59. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$ **b)** $\log_{\sqrt{2}} 3$ **c)** $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5}$ **d)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2,727$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log \frac{7}{5}}{\log \frac{1}{4}} = -0,243$

b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log \sqrt{2}} = 3,170$

d) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log \sqrt{3}}{\log \sqrt{2}} = 1,585$

60. Con la ayuda de los logaritmos, calcula el valor de *t* en los siguientes casos.

a) $1,025^t = 2,45$ **b)** $1,025^t = 2$ **c)** $2500 = 2000\cdot 1,03^t$ **d)** $120 = 100\left(1+\dfrac{0,03}{12}\right)^{12t}$

a) $1,025^t = 2,45 \Rightarrow t\log 1,025 = \log 2,45 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2,45}{\log 1,025} = 36,29$

b) $1,025^t = 2 \Rightarrow t\log 1,025 = \log 2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1,025} = 28,07$

c) $2500 = 2000\cdot 1,03^t \Rightarrow 1,03^t = 1,25 \Rightarrow t\log 1,03 = \log 1,25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,25}{\log 1,03} = 7,55$

d) $120 = 100\left(1+\dfrac{0,03}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 1,2 = 1,0025^{12t} \Rightarrow 12t\log 1,0025 = \log 1,2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,2}{12\cdot \log 1,0025} = 6,085$

3 Expresiones algebraicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Para cada polinomio, indica su grado y sus coeficientes, calcula su valor numérico para $x = 3$ y $x = -5$.

a) $P(x) = -2x^4 + 32$

b) $Q(x) = 2x^3 + x + 30$

c) $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{6}$

d) $S(x) = -2x^3 - x^2 + 3x$

a) Cuarto grado. Coeficientes: –2, 0, 0, 0, 32 ; término independiente: 32. $P(3) = -130$ y $P(-5) = -1218$.

b) Tercer grado. Coeficientes: 2, 0, 1, 30; término independiente: 30. $Q(3) = 87$ y $Q(-5) = -225$.

c) Segundo grado. Coeficientes: $\frac{1}{3}$, –5, $\frac{1}{6}$; término independiente $\frac{1}{6}$. $R(3) = -\frac{71}{6}$ y $R(-5) = \frac{67}{2}$.

d) Tercer grado. Coeficientes: –2, –1, 3, 0; no tiene término independiente. $S(3) = -54$ y $S(-5) = 210$.

5. Dados los polinomios $P(x) = -x^3 + x^2 - 3x - 1$, $Q(x) = -3x^3 - 6x + 3$ y $R(x) = x^3 + 2x^2$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + 2R(x)$

b) $2\left[P(x) - 3Q(x)\right] + \frac{1}{2}R(x)$

a) $4x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

b) $\frac{33}{2}x^3 + 3x^2 + 30x - 20$

6. Halla las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

$P(-3) = 0 = P\left(\frac{1}{2}\right)$. Luego las raíces son $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$.

7. Los ingresos y costes de una determinada operación comercial vienen dados por los siguientes polinomios, en los que *x* es el número de unidades producidas.

$$I(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 \qquad C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20$$

a) Calcula la expresión que determina los beneficios.

b) Calcula los beneficios en el caso de que los costes se reduzcan a la mitad.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20\right) = -\frac{3}{20}x^2 + 4x + 30$

b) $B(x) = I(x) - \frac{C(x)}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 10\right) = -\frac{1}{5}x^2 + 5x + 40$

8 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Realiza los siguientes productos de polinomios.

a) $(2x^2-3x+5)(-3x+2)$ **b)** $(-x^3+x^2-2)(-3x^2-4)$ **c)** $(6x^3-x^2-3x)(2x^2+3x-7)$

a) $-6x^3+4x^2+9x^2-6x-15x+10=-6x^3+13x^2-21x+10$

b) $3x^5+4x^3-3x^4-4x^2+6x^2+8=3x^5-3x^4+4x^3+2x^2+8$

c) $12x^5+18x^4-42x^3-2x^4-3x^3+7x^2-6x^3-9x^2+21x=12x^5+16x^4-51x^3-2x^2+21x$

13. Escribe el desarrollo del cubo de una resta: $(a-b)^3$.

$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

14. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $2x-3x(x^2-5)+(2-x)(-3x^2+6)$

b) $2(3x-1)^2+5(3x-1)(3x+1)-4x(3x+2)^2$

c) $3(2x^2-3)^2-2x(x^2+3x)-(1-2x)(-x^2+2)$

a) $2x-3x^3+15x-6x^2+12+3x^3-6x=-6x^2+11x+12$

b) $18x^2+2-12x+45x^2-5-36x^3-16x-48x^2=-36x^3+15x^2-28x-3$

c) $12x^4-36x^2+27-2x^3-6x^2-2x^3+x^2+4x-2=12x^4-4x^3-41x^2+4x+25$

15. Simplifica la expresión $2xa-4xb-3ya+6yb$.

$2x(a-2b)-3y(a-2b)=(a-2b)(2x-3y)$

16. Ejercicio resuelto.

17. Realiza las siguientes divisiones de monomios e indica si el resultado es un monomio.

a) $\dfrac{12x^4}{-3x^2}$ o **b)** $\dfrac{18x^5y^2z^4}{6x^2y^2z^3}$ **c)** $\dfrac{-54x^2y^4z^3}{18x^2y^2z^3}$ **d)** $\dfrac{8a^3d^2}{2b^3c^2d^3}$

a) $-4x^2$. Es un monomio.

b) $3x^3z$. Es un monomio.

c) $-3y^2$. Es un monomio

d) $\dfrac{4a^3}{b^3c^2d}$. No es un monomio.

18. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^4-2x^2-x+4):(x+2)$ **b)** $\left(x^6+\dfrac{1}{2}x^4+x^2+4\right):(2x^3+x-4)$

a) Cociente: $3x^3-6x^2+10x-21$ Resto: 46

b) Cociente: $\dfrac{x^3}{2}+1$ Resto: x^2-x+8

19 y 20. Ejercicios resueltos.

21. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) : (x+1)$

b) $(2x^5 - x^3 + 2x - 1) : (x-3)$

c) $(2x^4 - 3x^2 + 8x + 12) : (x+2)$

d) $(5x^5 - 5x^3 + 5x - 5) : (x+3)s$

e) $(a^2 + ab + b^2) : (a-b)$

a) Cociente: $2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$. Resto: 15

b) Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 155$. Resto: 464

c) Cociente: $2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Resto: 16

d) Cociente: $5x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 120x + 365$. Resto: –1100

e) Cociente: $a + 2b$. Resto: $3b^2$

22. Divide los polinomios:

a) $(x^5 - x + 2) : \left(x + \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(4x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}\right) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$

a) Cociente: $x^4 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{64} - \frac{255}{256}$. Resto: $\frac{2303}{1024}$

b) Cociente: $4x^2 + \frac{16}{3}x + 8$. Resto: $\frac{49}{4}$

23. Ejercicio interactivo.

24 y 25. Ejercicios resueltos.

26. Con ayuda de la regla de Ruffini, calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 1{,}25x^3 - 0{,}75x^2 + 0{,}5x - 1$, para $x = 2{,}05$.

$P(2{,}05) = 7{,}642$

27. Halla el valor de *m* para que sea exacta la siguiente división.

$$(2x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 24x + 16m) : (x-2)$$

Aplicando la regla de Ruffini se obtiene de resto $R = 16m - 32$. Como este resto debe ser nulo, $m = 2$.

28. Calcula el valor de *k* para que al dividir $x^5 + kx - 2$ entre $x + 3$ se obtenga de resto –272.

	1	0	0	0	k	–2
–3		–3	9	– 27	81	$-3k - 243$
	1	–3	9	– 27	$k + 81$	$-3k - 245$

Entonces, $-3k - 245 = -272$

Por lo tanto, $k = 9$

29. Calcula el valor que debe tomar *k* para que el polinomio $c(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}125x^2 + kx - 1$ sea divisible por $(x + 0{,}25)$.

$c(-0{,}25) = 0{,}5(-0{,}25)^3 + 0{,}125(-0{,}25)^2 + k(-0{,}25) - 1 = 0 \Rightarrow k = -4$

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces.

a) $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$

b) $9x^3+12x^2+4x$

c) x^6-16x^2

d) x^3-4x^2+x+6

e) $6x^3+11x^2+6x+1$

f) $2x^3+5x^2-x-6$

g) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

h) x^6-9x^4

a) $(x-1)^2(x+1)(x-3)$; $x=1$ (doble), $x=-1$, $x=3$

b) $x(3x+2)^2$ $x=0$, $x=-\frac{2}{3}$

c) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$; $x=0$ (doble), $x=-2$, $x=2$

d) $(x-2)(x+1)(x-3)$; $x=2$, $x=-1$, $x=3$

e) $(x+1)(2x+1)(3x+1)$; $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$

f) $(x-1)(x+2)(2x+3)$; $x=-2$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=1$

g) $(x-1)(x-2)(x^2+1)$; $x=1$, $x=2$

h) $x^4(x-3)(x+3)$; $x=0$ (cuarta), $x=3, x=-3$

33. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^5+3x^4-2x^3-6x^2+x+3$ $\quad Q(x)=x^3+3x^2-x-3$

b) $P(x)=x$ $\quad Q(x)=x^2-x$ $\quad R(x)=x^3-2x^2+x$

a) $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2(x-3)$, $Q(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

m.c.d.$\{P(x),Q(x)\}=(x-1)(x+1)$ m.c.m.$\{P(x),Q(x)\}=(x-1)^2(x+1)^2(x+3)(x-3)$

b) $P(x)=x$, $Q(x)=x(x-1)$, $R(x)=x(x-1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\}=x$ m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\}=x(x-1)^2$

34. Ejercicio interactivo.

35 y 36. Ejercicios resueltos.

37. Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes.

$$\boldsymbol{A(x)=\frac{x^3+2}{x^2+5x-3}} \qquad \boldsymbol{B(x)=\frac{x^4+x^3+2x+2}{x^3+x^2+5x^2+5x-3x-3}}$$

Factorizando $B(x)=\frac{(x+1)(x^3+2)}{(x+1)(x^2+5x-3)}$ y multiplicando en cruz se ve que son equivalentes.

38. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y halla su valor numérico para $x=2$.

a) $\frac{2x^4+x^3-11x^2+11x-3}{2x^3+3x^2-8x+3}$

b) $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^3-7x^2+16x-12}$

a) $\frac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)}=x-1$. Para $x=2$ el valor numérico es 1.

b) $\frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{x+3}{x-2}$. Para $x=2$ no tiene valor numérico.

39. Calcula y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{ab^2}{b^4}-a$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}$

c) $\left(x^2-y^2\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

d) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}$

a) $\dfrac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\dfrac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\dfrac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

d) $\dfrac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\dfrac{1}{x+a}$

40. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $A(x)=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

b) $B(x)=1+\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}}$

a) $A(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

b) $B(x)=\dfrac{2x^2+1+2x}{x^2+x+1}$

41. Si las expresiones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ expresan el coste, en euros, de fabricar, para un modelo de bicicleta, x cámaras y x válvulas, respectivamente, calcula la suma de costes.

$\boldsymbol{C_1(x)=500-\dfrac{x}{\dfrac{x^2}{10\,000}-1}}$

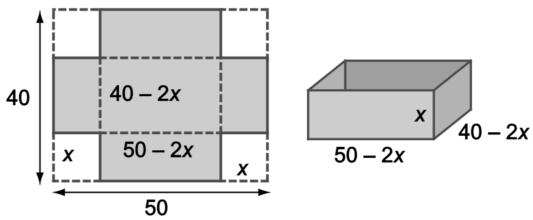
$\boldsymbol{C_2(x)=1000-\dfrac{x}{\dfrac{x}{100}-1}}$

$$C_1(x)+C_2(x)=500-\frac{x}{\dfrac{x^2}{10\,000}-1}+1000-\frac{x}{\dfrac{x}{100}-1}=\frac{1400x^2-15\,000\,000-2000x}{x^2-10\,000}$$

42. Ejercicio interactivo.

43. Ejercicio resuelto.

44. Con una cartulina rectangular de 50 cm x 40 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadros iguales en cada una de las esquinas. Escribe las expresiones algebraicas de la superficie y el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.



$V(x)=x(50-2x)(40-2x)=4x^3-180x^2+2000x$

$S(x)=40\cdot 50-4x^2$

45. Se considera como indicador del bienestar de un país la media ponderada de tres porcentajes: el de afiliación a la seguridad social (*x*), el de población con renta superior a la línea de pobreza (*y*) y el de población activa con trabajo (*z*). Los pesos asignados a dichos porcentajes son 1 : 2 : 2. Escribe la expresión algebraica del indicador y calcula su valor para $x = 65$ %, $y = 80$ % y $z = 92$ %.

$I(x,y,z) = \dfrac{x+2y+2z}{5}$, $I(65,80,92) = 81{,}8\,\%$

46. El negocio de una empresa que fabrica memorias para ordenador tiene las siguientes características:

- **Costes fijos: 2200 €**
- **Costes por unidad: 7 €**
- **Precio de venta por unidad: 12 €**

Escribe las expresiones algebraicas que permiten calcular los beneficios en función del número de unidades producidas, y aplícalas para el caso concreto de que se fabriquen 650 memorias en cada uno de los siguientes casos.

a) Se vende toda la producción.

b) Queda sin vender el 12 % de la producción.

	Costes $C(x)$	Ingresos $I(x)$	Beneficios $B(x)$	$B(650)$
a)	$2200+7x$	$12x$	$5x-2200$	1050
b)	$2200+7x$	$10{,}56x$	$3{,}56x-2200$	114

47 a 60. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

61. Identifica el número de variables, el grado, los coeficientes y el término independiente de los siguientes polinomios.

a) $2x^3+3x^2-4x+5$ **b)** $3xy^2z^3-2x^2y^3z^2$ **c)** $2y^2+3y+4$ **d)** $4ab-3cd^2+2d+7$

a) Una variable, *x*. Grado 3. Coeficientes: 2, 3, –4 y término independiente 5.

b) Tres variables, *x*, *y*, *z*. Grado 7. Coeficiente de mayor grado –2 , el coeficiente de sexto grado 3.

c) Una variable, *y*. Grado 2. Coeficientes: 2, 3 y término independiente 4.

d) Cuatro variables, *a*, *b*, *c* y *d*. Grado 3. Coeficientes: –3, 4, 2, y término independiente 7.

62. Calcula el valor numérico en $x=2$ y $x=0{,}15$ de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^4+2x^2-3$ **b)** $Q(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{4}x-2$ **c)** $R(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2$ **d)** $S(x)=\frac{1}{6}x^5+\frac{2}{3}$

a) $P(2)=21$, $P(0{,}15)=-2{,}95$

c) $R(2)=-\frac{4}{3}$, $R(0{,}15)=0{,}0149$

b) $Q(2)=\frac{23}{30}$, $Q(0{,}15)=-2{,}10$

d) $S(2)=6$, $S(0{,}15)=0{,}666\,679$

63. ¿Son los valores de $x=-2$, $x=2$, $x=-1$ y $x=1$ raíces del polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$?

$P(-2)=0, P(2)\neq 0, P(-1)=0, P(1)=0$. Luego, las raíces son $x=-2, x=-1$ y $x=1$.

64. Determina el valor de *a* para que $x = -2$ sea raíz del polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - (a+1)x^3 + 5ax - 4$$

Para que $x = -2$ sea raíz de $P(x)$ se tiene que cumplir que $P(-2) = 32 + 8(a+1) - 10a - 4 = 0$. Luego, $a = 18$.

Operaciones con polinomios

65. Simplifica los siguientes polinomios.

a) $8 - 2(2-3x)^2$ **b)** $(x-2)(x+3)(x-1)$ **c)** $4(2-5x)^2 - 16(1-5x)$ **d)** $-2(x+1)(x+2)^2$

a) $-18x^2 + 24x$ **b)** $x^3 - 7x + 6$ **c)** $100x^2$ **d)** $-2x^3 - 10x^2 - 16x - 8$

66. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$, $Q(x) = -x^3 - x^2 + 2$ y $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$ **b)** $-2P(x) - 3Q(x) - 3R(x)$

a) $x^3 - 7x^2 + x$ **b)** $-x^3 + 18x^2 - 4x + 3$

67. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2 + 2(2x-3)^2 - (2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2 - 2x - 1)(3x^2 - 2x) - 3x$

d) $(2x^2 - 3x + 2)(-3x^2 + x + 1) + (6x + 10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$

a) $-27x^2 - 60x + 4$ **b)** $15x^2 + 3x - 3$ **c)** $6x^4 - 10x^3 + x^2 - x$ **d)** $x^3 - 7x^2 - x + 2$ **e)** $x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{4}{15}x$

68. Desarrolla empleando las identidades notables.

a) $(2x+3)^2$ **b)** $(xyz^3 - x^2y)^2$ **c)** $(2z + 3xy)(3xy - 2z)$ **d)** $(3x + 2xy)^4$

a) $4x^2 + 12x + 9$ **b)** $x^2y^2z^6 - 2x^3y^2z^3 + x^4y^2$ **c)** $9x^2y^2 - 4z^2$ **d)** $16x^4y^4 + 96x^4y^3 + 216x^4y^2 + 216x^4y + 81x^4$

69. Emplea las identidades notables para escribir estas expresiones en forma de producto.

a) $x^2 + 4x + 4$ **b)** $4x^2 - 25$ **c)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$ **d)** $x^2 - 5$

a) $(x+2)^2$ **b)** $(2x-5)(2x+5)$ **c)** $(3x-2y)^2$ **d)** $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$

70. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(6x^4 + 11x^3 - 17x^2 + 11x - 3) : (2x^2 + 5x - 3)$

c) $(6x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 6x - 6) : (3x^2 + 2x + 1)$

d) $\left(2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{19}{4}x + \frac{3}{4}\right) : (x^2 + 3x - 1)$

a) Cociente: $3x + 2$. Resto: $-7x - 3$

b) Cociente: $3x^2 - 2x + 1$. Resto: 0

c) Cociente: $2x^2 + x - 3$. Resto: $-x - 3$

d) Cociente: $2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. Resto: $2x + \frac{3}{2}$

71. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(2x^4 - x^3 - x + 4) : (x - 3)$

b) $(-2x^4 - 3x^2 + 5x + 3) : (x + 2)$

c) $(-3x^3 + 2x^2 + x - 3) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $(2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2) : (-x + 3)$

a) Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 15x + 44$. Resto: 136

b) Cociente: $-2x^3 + 4x^2 - 11x + 27$. Resto: -51

c) Cociente: $-3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}$. Resto: $-\frac{21}{8}$

d) Cociente: $-2x^3 - 8x^2 - 26x - 78$. Resto: 232

72. Aplicando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la siguiente división $(x^8 - a^8) : (x - a)$.

Cociente: $x^7 + ax^6 + a^2x^5 + a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 + a^6x + a^7$ Resto: 0

Teorema del resto y del factor

73. Sin realizar las divisiones, calcula su resto.

a) $(x^7 + x^3 - 2x + 1) : (x - 3)$

b) $(x^{12} - x^5 - x + 12) : (x + 1)$

a) $R = 3^7 + 3^3 - 6 + 1 = 2209$

b) $R = (-1)^{12} - (-1)^5 - (-1) + 12 = 15$

74. Sin realizar la división, comprueba que el binomio $x - 3$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 6$.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 3$ es 0, por lo que se deduce que $x - 3$ es un factor del polinomio.

75. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 6x^5 - 44x^3 - 88x - k$ sea divisible por $x - 3$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x - 3$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ sea igual a 0.

$P(3) = 1458 - 1188 - 264 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

76. Halla el valor de k para el que el polinomio $P(x) = 3x^3 - kx^2 + 6k - 2$ sea divisible por $x + 2$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x + 2$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = -2$ sea igual a 0.

$P(-2) = -24 - 4k + 6k - 2 = 0 \Rightarrow k = 13$

77. La división de $x^3 + mx + 2$ entre $x - 2$ da 6 como resto. ¿Cuánto vale m? ¿Cuál es el cociente?

$2^3 + 2m + 2 = 6$, por lo que $m = 2$, y el cociente es $x^2 + 2x + 2$.

78. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = 1$ y que $P(3) = 10$.

Para que $x = 1$ sea una raíz, debe ser $P(x) = (ax + b)(x - 1)$, y como $P(3) = 10$, entonces $(3a + b)(3 - 1) = 10$, luego $3a + b = 5$. Por ejemplo, $a = 1$, $b = 2$.

$P(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

79. Halla la expresión de todos los polinomios de segundo grado que tienen por raíces –1 y 3. Determina aquel cuyo valor numérico para x = 5 es 24.

$P(x) = a(x + 1)(x - 3)$ $P(5) = a \cdot 6 \cdot 2 = 24$, por lo que $a = 2$ $P(x) = 2(x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$

80. Halla el número que hay que sumar al polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x$ para que sea divisible por $(x - 3)$.

Se trata de hallar a para que $3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + a = 0$. Resolviendo, se tiene que $a = 6$.

81. Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible por $(x^2 - 1)$.

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, el polinomio debe ser divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$, es decir: $1^5 + a \cdot 1^3 + b = 0$ y $(-1)^5 + a(-1)^3 + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ -a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1,\ b = 0$$

Factorización de polinomios

82. Encuentra las raíces del siguiente polinomio, teniendo en cuenta que todas ellas son números enteros.

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$x = 2$, $x = -3$, $x = 4$

83. Escribe un polinomio $P(x)$ cuyas raíces sean únicamente $x = -2$, $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$. ¿Hay más de uno?

Por ejemplo: $P(x) = (x + 2)(x - 5)(x - 3)(x + 1)$

Sí hay más de uno, pues se puede multiplicar por constantes, cambiar las multiplicidades de los factores o polinomio sin raíces reales sin que varíen las raíces.

84. Factoriza, utilizando la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
b) $x^3 - 3x + 2$
c) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 32x + 12$
d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
f) $x^3 + x^2 - 5x + 3$
g) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

a) $(x - 1)(x + 1)(x - 5)$
b) $(x - 1)^2(x + 2)$
c) $(x - 1)^2(x + 3)(x - 2)^2$
d) $(x + 1)^4$
e) $(x - 3)(x + 2)(x - 1)$
f) $(x - 1)^2(x + 3)$
g) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$

85. Descompón en factores primos los siguientes polinomios.

a) $x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2$
b) $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$
c) $10x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 19x - 3$
d) $3x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 4x - 4$
e) $-2x^3 + 10x^2 - 14x + 6$

a) $x^2(x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$
b) $(x - 1)(x + 1)^2(2x - 3)$
c) $(x - 1)^2(2x + 3)(5x - 1)$
d) $(x - 2)(x + 1)(x + 2)(3x^2 + 1)$
e) $-2(x - 3)(x - 1)^2$

86. Factoriza los siguientes polinomios utilizando las identidades notables.

a) $4x^2-12x+9$ **d)** $25x^2-20x+4$ **g)** $25x^2+20xy+4y^2$ **j)** $4x^4-16x^2y+16y^2$

b) $18-2x^2$ **e)** $12-3x^2$ **h)** $-4y^2+25x^6$ **k)** $4x^3-9y^4x$

c) x^4-4x^2 **f)** $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$ **i)** $4x^2+12xy+9y^2s$ **l)** $a^2-(b+c)^2$

a) $(2x-3)^2$ **d)** $(5x-2)^2$ **g)** $(5x+2y)^2$ **j)** $(2x^2-4y)^2$

b) $2(3-x)(3+x)$ **e)** $3(2-x)(2+x)$ **h)** $(5x^3-2y)(5x^3+2y)$ **k)** $(2x-3y^2)(2x+3y^2)x$

c) $x^2(x-2)(x+2)$ **f)** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ **i)** $(2x+3y)^2$ **l)** $(a-b-c)(a+b+c)$

87. Descompón en factores los siguientes polinomios.

a) $x^2+y^2+2xy-z^2$ **b)** $4-9x^2-25y^2+30xy$

a) $(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$ **b)** $2^2-(3x-5y)^2=(2-3x+5y)(2+3x-5y)$

88. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^2+x-2$, $Q(x)=x^2+2x-3$

b) $P(x)=2x^2-2$, $Q(x)=4x-4$

c) $P(x)=x-1$, $Q(x)=2x+2$ y $R(x)=3x^2-3$

d) $P(x)=x^2(x-2)$, $Q(x)=x(x^2-4)$ y $R(x)=x^3-2x^2$

e) $P(x)=x^2+5x+6$, $Q(x)=x^2-4$ y $R(x)=x+2$

a) m.c.d. $=x-1$; m.c.m. $=(x-1)(x+2)(x+3)$

b) m.c.d. $=2x-2$; m.c.m. $=4(x-1)(x+1)$

c) m.c.d. $=1$; m.c.m. $=6(x-1)(x+1)$

d) m.c.d. $=x(x-2)$; m.c.m. $=x^2(x-2)(x+2)$

e) m.c.d. $=x+2$; m.c.m. $=(x+3)(x+2)(x-2)$

Fracciones algebraicas

89. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{7x^2}{14x^2-21x}$ **d)** $\frac{3x^2-x}{x^3+2x}$ **g)** $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+x-6}$ **j)** $\frac{x^4+10x^3+21x^2-40x-100}{x^4+3x-10}$

b) $\frac{12-3x}{x-4}$ **e)** $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ **h)** $\frac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

c) $\frac{3x^2-12}{x+2}$ **f)** $\frac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **i)** $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$

a) $\frac{7x^2}{7x(2x-3)}=\frac{x}{2x-3}$

b) $\frac{-3(x-4)}{x-4}=-3$

c) $\frac{3(x-2)(x+2)}{x+2}=3(x-2)$

d) $\frac{x(3x-1)}{x(x^2+2)}=\frac{3x-1}{x^2+2}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$

f) $\frac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}$

g) $\frac{(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}=x-2$

h) $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{x+1}{x-1}$

i) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\frac{x-1}{x+3}$

j) $\frac{(x+2)(x-2)(x+5)^2}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-5)}=\frac{(x-2)(x+5)^2}{(x^3-2x^2+4x-5)}$

90. Halla, simplificando el resultado.

a) $x+1+\frac{1}{x-1}$ **b)** $2x-\frac{2x^2-1}{2+x}$

a) $\frac{x^2}{x-1}$ **b)** $\frac{4x+1}{2+x}$

91. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\frac{x^2}{x+1}$ **c)** $\frac{2x^2-x}{x+3}+\frac{2x}{x-3}+\frac{12x}{9-x^2}$

b) $\frac{x}{x-5}-\frac{2x-1}{x+5}-\frac{50}{x^2-25}$ **d)** $t-\frac{t^2}{t-1}+\frac{1}{t+1}$

a) $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\frac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x+5)(x-5)}=\frac{x^2+5x-2x^2+10x+x-5-50}{(x+5)(x-5)}=\frac{-x^2+16x-55}{(x+5)(x-5)}=\frac{(11-x)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{11-x}{x+5}$

c) $\frac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^3-6x^2-x^2+3x+2x^2+6x-12x}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x^3-5x^2-3x}{(x-3)(x+3)}=\frac{x(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\frac{t^3-t-t^3-t^2+t-1}{(t-1)(t+1)}=\frac{-t^2-1}{t^2-1}=-\frac{t^2+1}{t^2-1}$

92. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\frac{x^2-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}$ **b)** $\frac{x^3-x}{2x-4}:\frac{4x+4}{3x-6}$ **c)** $\left(1+\frac{1}{x}\right):\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ **d)** $\left(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x-1}{x+1}\right):\left(\frac{1+x}{1-x}:\frac{x+1}{x}\right)$

a) $\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\frac{x(x-1)(x+1)\cdot 3(x-2)}{2(x-2)\cdot 4(x+1)}=\frac{3x(x-1)}{8}=\frac{3x^2-3x}{8}$

c) $\left(\frac{x+1}{x}\right):\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x-1}$

d) $\frac{(x-1)^3(x+1)}{x(x+1)^3}=\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}$

93. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ **b)** $\frac{x^4-y^4}{(x-y)^2}$ **c)** $\frac{x^4-16}{(x+2)^2}$ **d)** $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

a) $\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$

c) $\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)^2}=\frac{(x-2)(x^2+4)}{x+2}=\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x+2}$

b) $\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)^2}=\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x-y}=\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x-y}$

d) $\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\frac{y-x}{xy}}=\frac{xy(y-x)(y+x)}{x^2y^2(y-x)}=\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

94. Calcula el valor de *k* para que, al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}$, resulte un polinomio de primer grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.

$$\frac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{3x-3+x-9}{x-1}}{\dfrac{kx-k-x-1}{x-1}}=\frac{(4x-12)(x-1)}{\left((k-1)x-(k+1)\right)(x-1)}=\frac{4x-12}{(k-1)x-(k+1)}$$

El denominador debe ser constante, por tanto: $k = 1$, y el polinomio será: $\dfrac{4\mathbf{x}-12}{-2}=-2x+6$.

Síntesis

95. Halla un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **El coeficiente del término cuadrático es la unidad.**
- **Es divisible por x – 1.**
- **Toma el valor 24 para x = –3.**

Ya que el coeficiente de x^2 es 1 y que el polinomio es de segundo grado y divisible por $x - 1$, tendrá la forma: $P(x) = (x - 1)(x + a)$. Para que quede totalmente determinado, sólo es necesario calcular a.

Dado que $P(-3) = 24$, se obtiene que $a = -3$, luego $P(x) = (x - 1)(x - 3)$.

96. Escribe un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **Es divisible por $x - 3$.**
- **Es divisible por $x + 4$.**
- **El valor numérico en el punto $x = -1$ vale 12.**

Según el teorema del factor, el polinomio debe tener como factores $x - 3$ y $x + 4$. Por tanto, la expresión del polinomio será de la forma $P(x) = k(x + 4)(x - 3)$, y como $P(-1) = 12$, tenemos que $k = -1$, luego $P(x) = -x^2 - x + 12$

97. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, –2, 3 y –4 **b)** 1, 2 y –2 (doble) **c)** –1 y 1, las dos dobles

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

c) $(x - 1)^2(x + 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)^2 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

98. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 - 3x$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Como $x = 1$ es una raíz, entonces $1^3 + b \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 0$, de donde $b = 2$ y $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, cuya factorización es $P(x) = x(x - 1)(x + 3)$.

99. Dado el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 8x + a$:

a) Calcula el valor de a para que $P(-1) = -2$.

b) Para el valor de a hallado, descompón el polinomio como producto de factores de primer grado.

c) Calcula las raíces enteras de $P(x)$

a) $P(-1) = 2 - 9 + 9 + 8 + a = -2$, luego $a = -12$

c) $x = 1$, $x = -2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$ (que no es entera)

b) $P = (x - 1)(x + 2)^2(2x + 3)$

100. Halla en cada caso el polinomio *P*(*x*) para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\dfrac{x+2}{2x-5}=\dfrac{x+3}{P(x)}$ **b)** $\dfrac{P(x)}{x^2+2x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$

a) $P(x)=\dfrac{(x+3)(2x-5)}{x+2}$, que no se puede simplificar, $P(x)$ no puede ser un polinomio.

b) $P(x)=\dfrac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)}=\dfrac{x^2(x+1)^2}{x+1}=x^2(x+1)=x^3+x^2$

101. Calcula los valores de *a* y de *b* para que el polinomio $4x^3+4x^2+ax+b$ sea divisible por $2x^2-x-1$. Escribe el cociente de la división.

$$\frac{4x^3+4x^2+ax+b}{2x^2-x-1}=2x+3+\frac{(a+5)x+(b+3)}{2x^2-x-1}\Rightarrow\begin{cases}a+5=0\\b+3=0\end{cases}\Rightarrow a=-5\quad b=-3$$

102. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(2x-1)(x+3)^2-3(x^2-x)(x+3)}{(x+3)^3}$ **b)** $\dfrac{(4x^2-2x^3)\cdot 6x}{x^2(x-2)}$

a) $\dfrac{-x^3+5x^2+21x-9}{(x+3)^2}=\dfrac{-(x+3)(x^2-8x+3)}{(x+3)^3}=-\dfrac{x^2-8x+3}{(x+3)^2}$ **b)** $\dfrac{-2x^2(x-2)6x}{x^2(x-2)}=-12x$

103. Calcula y simplifica la siguiente expresión.

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+1}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2}{1+x}}{-\dfrac{2}{x-1}}=\frac{1-x}{1+x}$$

104. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas con dos variables.

b) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{a}{xz}+\dfrac{a^2}{yz}$ **c)** $\left(x+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}$ **e)** $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{1}{x-y}:\dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}$ **d)** $\dfrac{3x^2y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$ **f)** $(a-b)^2:\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

a) $\dfrac{z+ay+a^2x}{xyz}$

d) $\dfrac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\dfrac{x}{2y}$

b) $\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

e) $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}$

c) $\left(\dfrac{2x-x^2+x^2+1-2x}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2}$

f) $(a-b)^2:\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)=\dfrac{(a-b)^2ab}{(b-a)}=(b-a)ab=ab^2-a^2b$

105. Dadas las expresiones: $A = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}$ $\qquad B = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}}$

a) Simplifícalas, expresando el resultado como cociente de polinomios.

b) Súmalas.

c) Multiplícalas.

a) $A = \frac{3x+5}{2x+3}$, $B = \frac{5x+8}{3x+5}$ **b)** $A+B = \frac{3x+5}{2x+3} + \frac{5x+8}{3x+5} = \frac{19x^2+61x+49}{6x^2+19x+15}$ **c)** $AB = \frac{3x+5}{2x+3} \cdot \frac{5x+8}{3x+5} = \frac{5x+8}{2x+3}$

CUESTIONES

106. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado. **b)** Si tienen diferente grado

a) $P(x) = 2x + 3$ $Q(x) = 4x + 6$ **b)** $P(x) = 2x + 3$ $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$

107. Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) Un polinomio de tercer grado puede tener seis raíces reales distintas.

b) Un polinomio de tercer grado puede tener una única raíz real.

c) La suma de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

d) El producto de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

e) Las fracciones algebraicas $A(x) = \frac{x+1}{x}$ y $B(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$ son equivalentes.

f) Las fracciones algebraicas $A(x) = \frac{x+1}{x}$ y $B(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$ son exactamente iguales.

a) Falso. Como máximo puede tener tres raíces reales distintas

b) Verdadero: $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$

c) Verdadero: $P(x) = x^4 + x^3$ $Q(x) = -x^4 + 1$ $P(x) + Q(x) = x^3 + 1$

d) Falso. El producto es siempre de octavo grado.

e) Verdadero: $(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$

f) Falso. Para x = 1 A(x) = 2 y B(x) no está definida.

108. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. En caso afirmativo, indica el grado del mismo.

a) $A(x) = -2x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$ **b)** $B(x) = -3x^2 - 2x + \frac{1}{x}$ **c)** $C(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x$ **d)** $C(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2x}$

a) Polinomio de grado 2. **b)** No es un polinomio. **c)** Polinomio de grado 5. **d)** No es un polinomio.

109. Demuestra que el polinomio $P(x) = ax^3 + ax^2 + a$ con $a > 0$ no tiene ninguna raíz real positiva.

Si $x = r > 0$ es una raíz real positiva, entonces $P(r) = a(r^3 + r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + 1 = 0$.

Pero si $r > 0$, entonces $r^3 + r^2 + 1 > 1$. Por lo tanto, no puede ser nulo.

110. Demuestra esta igualdad algebraica. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$$((x+y)+z)^2 = (x+y)^2 + z^2 + 2(x+y)z = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

PROBLEMAS

111. Escribe expresiones algebraicas para las siguientes situaciones.

a) El perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide x.

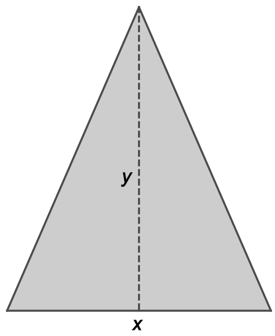
b) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos, siendo n el primero de ellos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles donde el lado desigual mide x y la altura y.

a) Sea a la medida del lado del cuadrado: $x^2 = a^2 + a^2$, y despejando a, $a = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, luego $P = 4a = 2\sqrt{2}\,x$.

b) Sean n, $n+2$ y $n+4$ los números consecutivos. Entonces: $S = n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 = 3n^2 + 12n + 20$

c)



Cada uno de los lados iguales es:

$$l = \sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4y^2+x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2}.$$

Por tanto: $P = 2l + x = 2\,P = 2l + x = 2\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2} + x = \sqrt{4y^2+x^2} + x$

112. Se consideran todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de sus catetos son dos números que se diferencian en dos unidades. Escribe una expresión que permita calcular el perímetro de dichos triángulos si *b* es el cateto mayor.

Sean b y $b-2$ las medidas de los catetos. Utilizando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{b^2 + (b-2)^2}$. Luego:

$$P = b + b - 2 + \sqrt{b^2+(b-2)^2} = 2b - 2 + \sqrt{2b^2 - 4b + 4}$$

113. Si *x* e *y* son dos números, expresa algebraicamente:

a) El primero más el cuadrado del segundo.

b) El primero por el cuadrado del segundo.

c) El producto del primero por el inverso del segundo.

d) Sabiendo que $x + y = 5$, expresa las relaciones anteriores dependiendo solo del número x.

e) Si $xy = 10$, halla el valor de $\dfrac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5}$.

a) $x + y^2$ **b)** xy^2 **c)** $x\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$

d) $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$: $x + y^2 = x + (5-x)^2 = x^2 - 9x + 25$ $xy^2 = x(5-x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{5-x}$

e) $xy = 10 \to \dfrac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5} = \dfrac{x^2+y^2-x^2-y^2-2xy}{5} = \dfrac{-2xy}{5} = \dfrac{-2\cdot 10}{5} = -4$

114. Halla las expresiones algebraicas que dan el producto de:

a) Tres números naturales consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

c) Tres múltiplos de cinco consecutivos.

a) $n(n+1)(n+2)$ **b)** $2n(2n+2)(2n+4)$ **c)** $5n(5n+5)(5n+10)$

115. La altura en metros de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 60t - 5t^2$, en la que t mide el tiempo en segundos.

a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 3, 6 y 8 segundos? ¿Y al cabo de 12?

b) Interpreta los resultados.

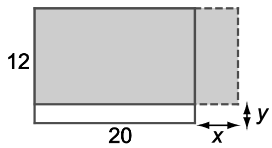
a) $h(1) = 60 - 5 = 55$ m; $h(3) = 180 - 45 = 135$ m; $h(6) = 360 - 180 = 180$ m; $h(8) = 160$ m, $h(12) = 0$ m

b) El cohete asciende durante los primeros 6 s, momento en el que comienza a caer, llegando al suelo a los 12 s.

116. Se considera un rectángulo de 20 metros de base y 12 de altura.

a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base en x metros y disminuir su altura en y metros.

b) Calcula el área del rectángulo obtenido al aumentar la base en 2 m y disminuir la altura en 4 m.



a) Las medidas del nuevo rectángulo son $20 + x$ y $12 - y$.

Por tanto, su área se puede escribir como: $S = (20 + x)(12 - y)$.

b) Para los valores indicados: $S = (20 + 2)(12 - 4) = 176$ m^2.

117. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 4 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 16 €, y el de tramo vertical, 25 €. Expresa el coste del marco en función de la longitud, x, del tramo horizontal.

Como el área es 4, la longitud del tramo horizontal es x y la longitud del tramo vertical es $\frac{4}{x}$.

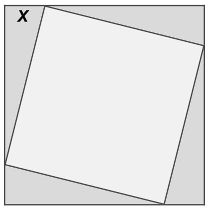
El coste es $C(x) = 16 \cdot 2x + 25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{x} = 32x + \frac{200}{x} = \frac{32x^2 + 200}{x}$.

118. Halla la expresión algebraica que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base, x. ¿Cuánto vale su área si $x = 2$ cm?

Como el perímetro es 8 y la base es x, los lados iguales miden $4 - \frac{x}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura es $\sqrt{\left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 4x}$, por lo que la superficie es $S(x) = \frac{x}{2}\sqrt{16 - 4x}$ cm^2.

Sustituyendo en $x = 2$ se tiene que $S(2) = \frac{2}{2}\sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$ cm^2.

119. En un cuadrado de lado 5 unidades de longitud se marcan cuatro puntos, uno en cada lado, de forma que su distancia al vértice más próximo es de *x* unidades. Estos cuatro puntos forman un nuevo cuadrado tal y como muestra la figura.



a) Escribe una expresión algebraica que determine el perímetro del nuevo cuadrado.

b) Escribe una expresión algebraica que determine el área del nuevo cuadrado.

Lado del nuevo cuadrado: $L = \sqrt{x^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 + 25 + x^2 - 10x} = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$

a) $P(x) = 4\sqrt{2x^2 - 10x + 25}$ **b)** $A(x) = L^2 = 2x^2 - 10x + 25$

120. En la siguiente tabla aparece el número de CD que está dispuesto a comprar un cliente en función del precio de cada uno.

Precio en céntimos	Número de unidades
24	50
22	60
20	70
18	80

a) Establece una expresión algebraica que determine el precio de cada CD si se adquieren *x* unidades.

b) Establece una expresión algebraica que determine el precio total a pagar al comprar *n* CD (*n* comprendido entre 50 y 80).

a) El precio que se paga por cada CD es: $p(x) = 24 - 2 \cdot \frac{x-50}{10} = 24 - \frac{x-50}{5} = 24 - \frac{x}{5} + 10 = 34 - \frac{x}{5}$

b) $P(n) = n\left(34 - \frac{n}{5}\right) = 34n - \frac{n^2}{5}$

121. El coste de producir *x* chips de memoria para ordenador (*x* entre 0 y 5) viene dado por el polinomio $C(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 8x$ €. El precio por unidad al que se pueden vender las *x* unidades producidas es de $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 20$ €.

a) Indica los ingresos que se obtienen al producir y vender 2 unidades.

b) Escribe el polinomio que determina el beneficio según las *x* unidades producidas y vendidas.

c) Indica el beneficio si se han producido y vendido 3 unidades.

d) Indica el beneficio si se han producido y vendido 5 unidades.

e) Interpreta los resultados.

a) $2P(2) - C(2) = 2\left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 20\right) - \left(-\frac{4}{5} \cdot 2^2 + 8 \cdot 2\right) = 23{,}2$ €

b) $B(x) = \text{Ingreso} - \text{Coste} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 20\right)x - \left(-\frac{4}{5}x^2 + 8x\right) = -\frac{1}{2}x^3 + 20x + \frac{4}{5}x^2 - 8x = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + 12x$

c) $B(3) = -\frac{1}{2} \cdot 27 + \frac{4}{5} \cdot 9 + 12 \cdot 3 = 29{,}7$ €

d) $B(5) = -\frac{1}{2} \cdot 125 + \frac{4}{5} \cdot 25 + 12 \cdot 5 = 17{,}5$ €

e) Se obtienen mayores beneficios si se producen 3 unidades de memoria que si se producen 5.

122. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

- **Primera barra: 30 g de oro, 45 g de plata y 75 g de cobre**
- **Segunda barra: 60 g de oro, 30 g de plata y 135 g de cobre**
- **Tercera barra: 45 g de oro, 60 g de plata y 75 g de cobre**

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 g de plata y 136,5 de cobre?

Sean x, y, z los gramos de la primera, segunda y tercera barra respectivamente.

	Oro	Plata	Cobre
Primera barra	$\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$	$\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$	$\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$
Segunda barra	$\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$	$\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$	$\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$
Tercera barra	$\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$	$\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$	$\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64,5 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69 \\ \frac{1}{2}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=3870 \\ 18x+8y+20z=4140 \\ 30x+36y+25z=8190 \end{cases} \Rightarrow x=90, y=90, z=90$$

Se deberán tomar 90 g de la primera barra, 90 g de la segunda barra y 90 g de la tercera barra.

123. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 10 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50 €/kg. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg. ¿Cuál deberá ser la proporción de los tipos de cafés?

Sean x los kg de café de mayor calidad e K los kg de café de menor calidad. Entonces:

$10x+7,5y=8,4(x+y)$. Por tanto, $10x+7,5y=8,4x+8,4y \Rightarrow 1,6x-0,9y=0 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0,9}{1,6}=\frac{9}{16}$.

Deberá mezclar 9 partes del café de mayor calidad con 16 partes del café de inferior calidad.

124. Expresa algebraicamente el producto de un número por el cubo de otro si entre ambos suman 24.

Como entre los dos números suman 24, si uno es x, el otro es $24 - x$, por lo que su producto es $x(24 - x)^3$.

125. Los costes, en euros, de fabricar *x* pares de zapatillas deportivas vienen dados por la expresión:

$$C(x) = -\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600$$

a) Calcula el coste total que supone fabricar 50 pares de zapatillas.

b) Indica cuáles son los costes fijos.

c) Indica cuáles son los costes variables.

d) Indica cuáles son los costes totales para cada par de zapatillas cuando se fabrican *x* pares.

e) Indica cuáles son los costes variables para cada par de zapatillas cuando se fabrican *x* pares.

f) Indica cuáles son los costes totales por cada par de zapatillas cuando se fabrican 75 pares.

a) $C(50) = -\frac{4}{25}\cdot 2500 + 70\cdot 50 + 600 = 3700$ €

b) Los costes fijos no dependen de la producción, vienen dados por el término independiente: $C_f = 600$ €.

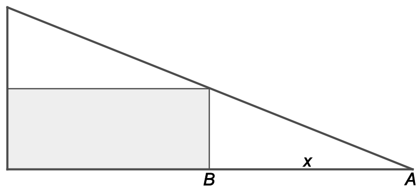
c) Los costes variables son el total de costes menos los costes fijos, por tanto: $C_v = -\frac{4}{25}x^2 + 70x$.

d) $\frac{C(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600}{x} = -\frac{4}{25}x + 70 + \frac{600}{x}$

e) $\frac{C_v(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x}{x} = -\frac{4}{25}x + 70$

f) $\frac{C(75)}{75} = \frac{-\frac{4}{25}\cdot 75^2 + 70\cdot 75 + 600}{75} = 66$ €

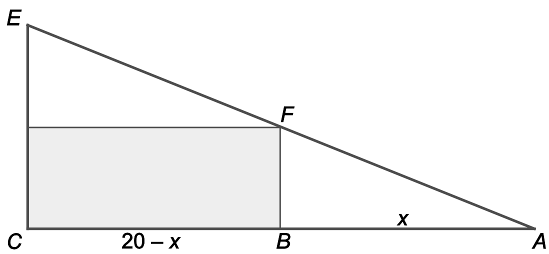
126. Un rectángulo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo de catetos 8 y 20 cm tal y como muestra la figura.



a) Escribe la expresión algebraica que determina el área del rectángulo suponiendo que la distancia entre los puntos *A* y *B* es de *x* metros.

b) Calcula los valores numéricos de la expresión anterior para $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.

a) Los triángulos *ABF* y *ACE* son semejantes y, por tanto, verifican el teorema de Tales:



$$\frac{x}{FB} = \frac{20}{8} \Rightarrow FB = \frac{2x}{5}$$

El área del rectángulo será:

$$S = (20 - x)\cdot\frac{2x}{5} = \frac{40x - 2x^2}{5}\ \text{cm}^2$$

b)

$$S(2) = \frac{80 - 8}{5} = \frac{72}{5} = 14{,}4\ \text{cm}^2$$

$$S(5) = \frac{200 - 50}{5} = \frac{150}{5} = 30\ \text{cm}^2$$

$$S(10) = \frac{400 - 200}{5} = \frac{200}{5} = 40\ \text{cm}^2$$

ENTORNO MATEMÁTICO

Álgebra, zombis, alienígenas y lechugas

La empresa de animación digital FRIKACTION comercializa tres videojuegos: Frikaction 1 en la que unas cucarachas deben luchar contra una plaga de zombis, Frikaction 2 en la que se utilizan lechugas para acabar con los alienígenas que han invadido la Tierra, y Frikfashion en la que se utilizan tomates y otras hortalizas para adornar modernas ciudades.

La siguiente tabla muestra los datos del negocio:

Mantenimiento del local y otros costes fijos			1250 € por día
	Frikaction 1	Frikaction 2	Frikfashion
Precio de venta por unidad	45	39	30
Costes de fabricación por unidad	25	21	21

Un estudio de mercado ha demostrado que las preferencias de los jugadores se reparten de manera desigual; la segunda parte del juego Frikaction cumple con la premisa de que "segundas partes nunca fueron buenas" y no ha tenido tanta aceptación como la primera parte, mientras que el juego Frikfashion no ha sido bien acogido por los jugadores. De tal modo que, por cada tres unidades vendidas de Frikaction 1, se venden dos unidades de Frikaction 2 y una de Frikfashion.

Suponiendo que se producen y venden *x* unidades diarias del juego Frikaction 1 y que del resto de juegos se fabrican y venden en la proporción estimada por el estudio:

a) Calcula la expresión algebraica que proporciona los costes totales.

b) Calcula los ingresos totales.

c) Calcula el beneficio de la empresa y halla el beneficio para los casos específicos de $x = 25$ y $x = 100$ e interpreta los resultados.

a) $C(x) = 1250 + 25x + 21\cdot\dfrac{2}{3}x + 21\cdot\dfrac{x}{3} = 1250 + 25x + 14x + 7x = 1250 + 46x$

b) $I(x) = 45x + 39\cdot\dfrac{2}{3}x + 30\cdot\dfrac{x}{3} = 45x + 26x + 10x = 81x$

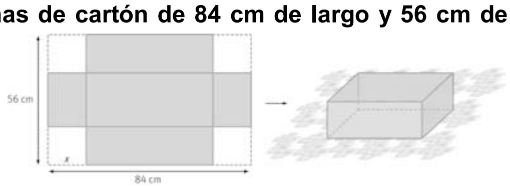
c) $B(x) = I(x) - C(x) = 35x - 1250$ $B(25) = -375$ € de pérdidas. $B(100) = 2250$ € de beneficios.

Para $x = 25$ hay pérdidas y para $x = 100$ hay beneficios.

Las cajas

La empresa FRIKACTION ha decidido asumir la fabricación de las cajas para guardar y enviar a las tiendas de venta los lotes de juegos que comercializa. Para ello utiliza planchas de cartón de 84 cm de largo y 56 cm de ancho.

Para construir la caja, el procedimiento que han implementado en la empaquetadora consiste en recortar cuatro cuadrados iguales en las cuatro esquinas y ajustarlos tal y como muestra la figura.



a) Calcula expresiones algebraicas que determinen la superficie y el volumen de la caja sin tapa que se obtiene en función del lado x de los cuadrados recortados.

b) Elabora una hoja de cálculo tal que muestre la superficie y el volumen de la caja para diferentes valores de *x*.

c) Con ayuda de la hoja de cálculo anterior, establece la longitud *x* que hace que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuánto vale la superficie en este caso?

a) $S(x) = 56\cdot 84 - 4x^2 = 4704 - 4x^2$ $V(x) = (84-2x)(56-2x)x = 4x^3 - 280x^2 + 4704x$

b)

x	7	8	9	10	10,97	10,98	10,99	11	12
Superficie	4508	4448	4380	4304	4222,6397	4221,7584	4220,8798	4220	4128
Volumen	20508	21760	22572	23040	23187,98669	23188,02077	23188,0252	23188	23040

c) El máximo volumen se obtiene al cortar cuadrados de lado 10,98 cm. La superficie aproximada, en este caso, es de 4221,76 cm^2

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula y simplifica.

a) $(2x^2-3x+1)(-x^2+2x-2)-2(2x-3)^2$

b) $2(3x-5)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2$

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{5}\right)\left(3x^2+\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2$

a) $(2x^2-3x+1)(-x^2+2x-2)-2(2x-3)^2=-2x^4+7x^3-19x^2+32x-20$

b) $2(3x-5)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2=-27x^2-120x+75$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2=16x^3+36x^2+24x+5$

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{5}\right)\left(3x^2+\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2=\frac{9}{2}x^4+\frac{51}{160}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{33}{50}$

2. Divide los polinomios:

a) $(6x^4-11x^3+14x^2+x-10):(3x^2-x-2)$

b) $(3x^4-4x^3+17x^2-4x-12):(x^2-x+6)$

a) Cociente: $2x^2-3x+5$. Resto: 0

b) Cociente: $3x^2-x-2$. Resto: 0

3. Factoriza los polinomios:

a) $x^3-7x^2+16x-12$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5$

c) $16x^4-16x^2+4$

d) $2x^3y-3x^2y^2$

a) $x^3-7x^2+16x-12=(x-3)(x-2)^2$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5=(x-1)^2(x+5)(2x-1)$

c) $16x^4-16x^2+4=4(2x^2-1)^2=4(\sqrt{2}x-1)^2(\sqrt{2}x+1)^2$

d) $2x^3y-3x^2y^2=x^2y(2x-3y)$

4. Calcula el valor numérico para $x = 1$ y para $x = -2$ del polinomio: $P(x) = -3x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 15x + 122$.

$P(1)=115 \quad P(-2)=208$

5. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x)=-3x^3+12x^2+kx-21$ sea divisible por $x+3$.

$P(x)=-3(-3)^3+12(-3)^2-3k-21=-3k+168=0 \Rightarrow k=56$

6. Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la división $(2x^3+3x-2):(2x-1)$.

Cociente: $C(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ Resto: $-\frac{1}{4}$

7. Calcula el valor de k para que el valor numérico del polinomio $P(x) = -3x^3 - 2x^2 + kx - 6$ en el punto $x = -3$ valga 48.

$P(-3)=-3(-3)^3-2(-3)^2-3k-6=-3k+57=48 \Rightarrow k=3$

8. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 52x - 60 \qquad Q(x) = x^3 - 7x + 6$$

$P(x) = (x-2)^2(x+3)(x-5)$ $Q(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

Por tanto el m.c.d de los dos polinomios es $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$ y su m.c.m. es $(x-1)(x+3)(x-2)^2(x-5)$.

9. Calcula y simplifica.

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9}$ **b)** $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9} = \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{9x-3}{x+3} - \dfrac{7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x(x+3)-(9x-3)(x-3)-7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-7x^2+36x-16}{x^2-9}$

b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1} = 1 + \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 + 2x(x+1) - 3}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+4x-2}{x^2+2x+1}$

10. Determina, mediante una expresión algebraica, el área de un triángulo equilátero de perímetro 3*x*.

$S(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

11. Una empresa fabrica y vende un cierto producto. El coste en euros para producir *x* unidades viene dado por:

$$C(x) = \left(\frac{x}{250}\right)^2 + \frac{x}{500} + 20$$

Se sabe, además, que el precio al que puede vender cada unidad es $p(x) = \dfrac{x}{10\,000} - 0{,}25$ €. Calcula la expresión algebraica que determina los beneficios.

$B(x) = I(x) - C(x) = x\left(\dfrac{x}{10\,000} - 0{,}25\right) - \left(\dfrac{x}{250}\right)^2 - \dfrac{x}{500} - 20 = \dfrac{21x^2 - 63\,000x - 5\,000\,000}{250\,000}$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La factorización del polinomio $P(x,y) = 16x^4 - 81y^2$ es :

A. $(2x-3y)^4$

B. $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$

C. $(4x+9y)^2(4x-9y)^2$

D. $(8x^3-27y^3)(2x-3y)$

Solución: B

2. **La suma de las fracciones algebraicas** $\frac{1}{x}-\frac{1+x}{x^2}$ **es:**

A. $\frac{-1}{x^2}$

C. $\frac{(2x^2-x)}{x^3}$

B. $\frac{1}{x^2}$

D. Ninguna de las anteriores

Solución: A

3. **La diferencia de los lados de dos cuadrados es 3 cm. Si el lado del pequeño mide *x* cm, el valor absoluto de la diferencia de las áreas es:**

A. 15 cm^2 **B.** 27 cm^2 **C.** $6x + 9$ cm^2 **D.** $6x - 9$ cm^2

Solución: C

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Se consideran las fracciones algebraicas:**

$$A(x)=\frac{x+2}{x+1} \qquad B(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$$

A. Son exactamente iguales.

B. Son equivalentes.

C. El valor numérico en $x = 1$ es el mismo.

D. Los valores numéricos en todos los puntos distintos de –1 y –2 son iguales.

Solución: B, C y D

5. **Se consideran las expresiones algebraicas:**

$$A(x)=\sqrt{2}x^2 \quad B(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{x} \quad C(x)=\frac{2+x}{\sqrt{x}}$$

A. Ninguna es un polinomio.

C. Dos son polinomios.

B. Solo una de ellas es un monomio.

D. Todas son polinomios.

Solución: B

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Se sabe que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ verifican la siguiente relación $P(x) = (x–1)Q(x) + R$ siendo R un número real**

Se consideran las afirmaciones:

1. $P(1) = 0$ **2.** **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$.**

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí.$\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b.

Solución: A

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere calcular el valor numérico en $x = a$, $y = b$ de la expresión algebraica:**

$$\frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{1}{x}} : \frac{x^2 - 2x + 1}{xy - x - y + 1}$$

Para ello se aportan los siguientes datos:

1. $a = 3$

2. $b = -3$

A. Se puede eliminar 1.

B. Se puede eliminar 2.

C. No es necesario ningún dato.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: B